IICT – BAS eISSN: 2367-8666
Lecture Notes in Computer Science and Technologies

2

Eléments de la théorie des probabilités

Vera Angelova

eISBN: 978-954-91700-9-2

The series **Lectures Notes in Computer Science and Technologies of the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences** presents in an electronic format textbooks for undergraduate, graduate and PhD students studied various programs related to Informatics, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Communication Technologies, etc., as well as for all readers interested in these scientific disciplines. The Lecture Notes are based on courses taught by scientists of the Institute of Information and Communication Technologies - BAS in various Bulgarian universities and the Center for Doctoral Training in BAS. The published materials are with open access - they are freely available without any charge.

eISSN: 2367-8666

Avec la collaboration de madame Viviane Baligand et monsieur François Mimiague - Professeur à l'Université de Bordeaux IV, qui ont posé les basses de l'enseignement en Statistique au programme français de la Faculté de gestion et d'économie à l'Université de Sofia.

Table des matières

Objectif

L'objectif de ce manuel est d'enrichir les savoirs en mathématique avec la théorie des probabilités, indispensable pour l'apprentissage des méthodes des théories économiques contemporaines et en fin de compte la statistique appliquée. Réaliser des connaissances théoriques et des utiles pratiques pour déterminer des caractéristiques et les lois de distribution des variables aléatoires.

Le manuel encadre des notions de base et des thèmes de la théorie des probabilités : ensembles probabilistes, combinatoire, probabilité, variables aléatoires et leurs caractéristiques, fonctions de répartition et de distribution, paramètres, loi des grands nombres, théorème central limite.

Pré-requis : Mathématiques I$^{\text{ère}}$ et II^{e} parties

Introduction

La statistique a envahi notre vie quotidienne. On ne peut pas ouvrir un journal, assister à un cours, regarder la TV sans être confronté à des faits statistiques. La statistique est devenue une nécessité pour connaitre une situation, construire une stratégie, prendre une décision.

Dans le sens moderne ≪la statistique≫ est la science qui développe les fondements théoriques et la méthodologie de l'étude statistique. C'est un ensemble des principes et des méthodes mis au point pour recueillir, classer, synthéser et communiquer des données numériques en vue de leur utilisation.

Le terme ≪les statistiques≫ est perçu dans le sens d'ensembles de données souvent numériques. Ex. : statistiques de l'emploi, du commerce extérieur.

Ces deux sens du mot statistique ont bien sûr entre eux des liens très étroits.

- on recueille des informations en vue de les traiter
- les méthodes statistiques ne peuvent s'appliquer que sur des données recueillies.

Les méthodes statistiques sont liées à de nombreux et longs calculs réputés ennuyeux, ce qui justifie la réflexion suivante d'un étudiant : ≪S'il ne me restait qu'une heure à vivre, j'aimerais la passer dans un cours de statistiques : elle me semblerait tellement plus longue. ≫ Heureusement aujourd'hui il y a les calculatrices et les ordinateurs.

La statistique n'est pas une science récente. On trouve des exemples de *dénombrement* ou de *recensement* il y a plus de 4 000 ans en Chine, dans la Bible, en Égypte, ... Au 13$^{\text{ème}}$ siècle on assiste au début de la statistique administrative, aux premiers enregistrements des actes d'état civil : registres des naissances, des mariages, des décès.

Jusqu'au 18$^{\text{ème}}$ siècle l'enregistrement des faits conserve un caractère passif.

Au 17$^{\text{ème}}$ et 18$^{\text{ème}}$ siècles on assiste à l'apparition d'un nouvel outil très important : **la théorie des probabilités** (Pascal, Fermât, Huyghens, Bernoulli, Bayes, Gauss, Laplace). Cet outil appliqué à la statistique va permettre l'élaboration d'une nouvelle phase de la statistique : l'interprétation des faits. (Condorcet, Poisson, Quetelet)

Au 20$^{\text{ème}}$ siècle la statistique est devenue un outil qui intervient dans les domaines les plus divers : les assurances, l'agriculture, la climatologie, la démographie, les finances, la génétique, la géographie, l'industrie, la linguistique, la médecine, la pharmacologie, la physique, la planification, la politologie, la psychologie, la sociologie etc.

Dans le milieu industriel elle intervient aux niveaux successifs de la définition du produit à créer, de sa fabrication, du contrôle de sa qualité, de sa distribution. La statistique joue un rôle important en marketing, dans les sciences humaines, en politique grâce aux sondages.

Pourtant il n'est pas rare d'entendre des réflexions du genre «moi je me méfie des statistiques». N'a-t-on pas écrit qu'il existe trois formes de mensonges qui sont dans l'ordre de gravité : le mensonge ordinaire, le parjure et le mensonge par la statistique.
Pourtant lorsque quelqu'un décide d'éviter de prendre le train la veille d'un jour férié ou d'appliquer le dicton «en avril ne te découvre pas d'un fil» il fait de la statistique sans le savoir, comme Monsieur Jourdain faisait de la prose.

Méthode statistique

L'analyse du monde réel s'effectue sur une représentation de ce monde dans laquelle l'observateur a transcrit ce qui lus semblait essentiel. L'observation prolongée d'un même événement fait apparaitre dans certains cas des permanences qui conduisent à la notion de lois.

Il existe des lois ou **liaisons déterministes** comme l'allongement d'un ressort en fonction de la masse ou d'une barre de fer sous l'effet de la chaleur.

Il existe des lois ou **liaisons statistiques** comme le nombres de voyageurs dans les transports en commun d'après le jour, l'heure ou le temps qu'il fait. Ce sont des liaisons basées sur un grand nombre d'observations. C'est ce genre de liaisons que la statistique étudie.

Phases de la méthode statistique

Rassembler - recueil des données à l'aide notamment d'enquêtes ou de recensements
Organiser - présentation des résultats à l'aide de tableaux, de diagrammes, de graphiques
Analyser - résumer un tableau de données à l'aide d'un petit nombre de paramètres
Ces trois phases constituent la **Statistique descriptive.**

Données statistiques

Il existe deux sortes de données statistiques :
• celles qui concernent une population et précisent comment les éléments de cette population se répartissent en classes . Ce sont les ***séries statistiques***;
• celles qui concernent une mesure ou une quantité et précisent comment cette mesure ou cette quantité évolue dans le temps. Ce sont les ***séries chronologiques***.

L'ensemble soumis à observation peut être un échantillon d'un ensemble plus vaste.
On peut se poser la question suivante : Quel est le rapport de l'échantillon avec la population totale ?
Pour une série chronologique on peut se poser la question : Comment va évoluer la «mesure» ou la «quantité» dans le futur ?
Ceci conduit à une nouvelle phase de la méthode statistique :

Interpréter - aspect de la **Statistique inductive** ou **inférative**.

On peut conditionnellement diviser les méthodes de la statistique inférative par deux - **l'estimation des paramètres de la population** et des **tests d'hypothèses**.

Le sujet du cours de Bases de statistique - I partie est la théorie des probabilités - la théorie qui essaie de contrôler le hasard. Les premières personnes qui s'intéressent aux problèmes des probabilités sont des mathématiciens français, Blaise Pascal et Pierre de Fermat qui répondent aux questions soulevées par un adepte des jeux de hasard, le chevalier de Méré. A cette époque, la théorie des probabilités se développe uniquement en relation avec les jeux de hasard. Mais avec Pierre Simon Laplace et Karl Friedrich Gauss, les bases de la théorie s'étendent à d'autres applications et phénomènes.

Le calcul des probabilités fournit une modélisation efficace des situations non déterministes c'est-à-dire des phénomènes aléatoires ou stochastiques. En ce qui concerne les premiers, le résultat d'une expérience suit une loi rigoureuse connue (taux de croissance d'une population). On peut donc ainsi prévoir le résultat pour un événement donné. En revanche dans le cas des phénomènes aléatoires, le résultat de l'expérience n'est pas connu avec certitude mais fluctue autour d'un résultat moyen qui est régit par une loi.

Les notions de base sont la variable aléatoire et la probabilité. On calcule les caractéristiques statistiques de la variable aléatoire et détermine sa loi de probabilité.

Le calcul des probabilités utilise l'analyse combinatoire ainsi que la théorie des ensembles. On va commencer par l'espace fondamental et les événements de la théorie des ensembles. On va faire un rappel de l'algèbre des ensembles et l'analyse combinatoire – Arrangements, Permutations, Combinaisons – les utiles pour compter les objets.

Après on va définir la probabilité, les variables aléatoires – discrets et continues. On va apprendre à calculer leurs caractéristiques statistiques – moyenne, espérance, variance. Et à la fin on va considérer quelques lois de probabilité discrètes et continues.

Le cours continue avec les Bases de la statistique - II^{e} partie, comprenant la Statistique descriptive - les phases de ressemblance, organisation et analyse de données. La dernière phase de la méthode statistique - l'interprétation est pourvu dans le sujet de la Statistique appliquée - Statistique inférative (estimation et théorie des tests) .

Introduction à la théorie des probabilités

La vie quotidienne est pleine d'événements dépendants du hasard. Lorsqu'un événement dépend du hasard, on peut avoir le sentiment qu'il est plus ou moins probable. En particulier, on a l'idée assez nette que certains événements sont très peu probables : quoique ce ne soit pas impossible, il est, par exemple, très peu probable qu'un jour donné aucune voiture ne traversera un grand carrefour.

Quoique la présence du hasard dans la vie, il faut cependant prendre des décisions et cela en assumant des risques, c'est-à-dire en agissant de telle façon que la réalisation d'un certain événement dépendant du hasard puisse entraîner des conséquences désastreuses. Une conduite sage consiste à ne prendre que des risques minimes. L'exemple, bien connu, d'une compagnie d'assurance montre une telle conduite.

Une compagnie d'assurance assure n abonnés contre un certain risque et s'engage à verser une somme a à chaque abonné sinistré. Quelle prime b devra-t-elle demander à chaque abonné ? Le nombre X des abonnés qui seront sinistrés dépend du hasard. Il n'est pas impossible que tous les abonnés soient sinistrés, c'est-à-dire que l'on ait $X = n$. Pour ne pas être en perte dans ce cas, et compte tenu de ses frais, la compagnie devrait demander une prime b supérieure à la somme a. Si elle le faisait, elle ne trouverait aucun client. La compagnie d'assurance va donc prendre le risque de perdre de l'argent, mais elle s'arrangera pour que ce risque soit faible, c'est-à-dire qu'elle choisira la prime b de telle sorte qu'il soit très peu probable que la somme aX qu'elle aura à verser, augmentée de ses frais et d'un certain bénéfice minimum, dépasse la somme na qu'elle aura touchée. Pour déterminer b, elle se servira alors de la Théorie des probabilités.

La Théorie des Probabilités permet de mesurer la probabilité de certains événements et donne des règles de calcul sur ces probabilités. A l'aide du calcul des probabilités on peut créer un modèle mathématique s'adapte à la situation envisagée qui permet d'étudier dans quelles conditions certains événements sont très peu probables, ou très probables, et permet donc de choisir une ligne de conduite rationnelle. Sans prêter trop d'importance à ces mots, on peut donc dire que la Théorie de probabilités permet de ≪dominer le hasard≫.

Chapitre 1

Espace fondamentale et événements

1.1 Vocabulaire fondamental

Un espace probabilisé est la donnée de trois objets : $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ où Ω est l'ensemble des "résultats possibles" d'une expérience aléatoire, $\mathscr{T}$ un ensemble "d'événements", et P une "loi de probabilité" sur cet ensemble. Précisons la signification de ce vocabulaire :

Jetons en l'air une pièce de monnaie. On ne peut pas prévoir avec certitude le résultat du jet en avance, mais le résultat est clairement identifiable - «face» ou «pile». En plus, on peut décrire avant le jet l'ensemble de tous les résultats possibles : «face» ou «pile». Alors ce jet constitue **une épreuve (une expérience aléatoire)**, cest-à-dire un expérience dont le résultat est incertain.

On appelle **expérience aléatoire (épreuve)** toute expérience qui satisfait les conditions suivantes

• on ne peut pas prévoir avec certitude (avant l'expérience) le résultat de l'expérience, mais ce résultat est clairement identifiable ;

• on peut décrire, avant l'expérience, l'ensemble de tous les résultats possibles.

> **Définition 1** **Expérience ou épreuve aléatoire :** On appelle *expérience aléatoire (*ou *épreuve)* toute expérience qui a plusieurs résultats possibles mais dont l'issue ne peut être prévue avec certitude. Le résultat est dû au hasard. On peut cependant décrire tous les résultats possibles.

Très souvent le hasard résulte, ou bien d'un manque d'informations sur les conditions expérimentales, ou bien de l'impossibilité pratique d'exploiter les données expérimentales pour prévoir le résultat.
Pour étudier un phénomène aléatoire, il faudra d'abord l'assimiler à une expérience aléatoire (qui est presque toujours une notion idéale ou virtuelle) et associer ensuite à ce phénomène un modèle mathématique ; c'est sur ce modèle qu'on pourra le plus commodément raisonner et calculer. Les notions suivantes sont des éléments de cette modélisation.

Définition 2 **Éventualité ou événement élémentaire :** Le résultat d'une expérience constitue une **éventualité** ou un **événement élémentaire**.

L'éventualité est une propriété (ou qualité) E liée au résultat (ou à l'issue) de l'expérience aléatoire : à chaque mise en œuvre de l'événement aléatoire, ou bien E est réalisée, ou bien E n'est pas réalisée.

Exemple 1.1.1 Envisageons l'expérience élémentaire telle que le jet d'une pièce de monnaie dans l'air. Ce jet constitue une épreuve, c'est-à-dire une expérience dont le résultat est incertain. Dans cette expérience, deux résultats (deux événements) sont possibles, un côté «face» (F) et un côté «pile» (P). Si l'expérience est constituée du double jet d'une pièce de monnaie, quatre résultats (éventualités) sont envisageables : FF, FP, PF, PP.
Une expérience qui consiste à prendre la température d'un patient dans un hôpital a un très grand nombre de résultats possibles qui dépendent du degré de précision avec lequel le thermomètre est étalonné. Pour cette expérience, il est pratique de supposer que la température du patient peut prendre n'importe quelle valeur entre 35^{o}C et 42^{o}C. □

Définition 3 **Ensemble fondamental (Univers) :** c'est l'ensemble de toutes les issues (ou résultats) possibles de l'expérience aléatoire, c.à.d. de toutes les éventualités. Cet ensemble est désigné en général par Ω.

Exemple 1.1.2 On jette deux dés de couleurs différentes : le résultat de l'expérience est exprimé par la donnée des nombres affichés par chacun des dés.
$\Omega = \{[a, b]; a, b$ entiers compris entre 1 et 6$\}$ □

Exemple 1.1.3 On tire "au hasard" successivement et sans remise, deux boules d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 : le résultat peut être exprimé par la succession des deux numéros des boules tirées.
$\Omega = \{[a, b]; a, b$ entiers distincts compris entre 1 et 10$\}$. □

Exemple 1.1.4 On note la taille d'un individu pris "au hasard" dans une population donné, le nombre consiste en un nombre réel (l'unité de longueur ayant été choisie)
$\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On pourra en pratique se restreindre à un intervalle plus petit. □

Exemple 1.1.5 (Jeu de pile ou face) si l'épreuve consiste à jouer 2 fois à pile ou face.
$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. □

Un ensemble fondamental peut être

- **discret :** dans ce cas, il y a 2 possibilités
  - **ensemble fini** - s'il contient un nombre fini de résultats (jet d'une pièce de monnaie Ω = {F,P}, jet d'un dé Ω = {1,2,3,4,5,6})

- **ensemble infini dénombrable** - si l'on peut numéroter chacun des résultats (tirage avec remise).

- **continu :** si l'ensemble est infini non dénombrable (observation de poids, de taille, de temps $\Omega = [35^o\text{C}, 42^o\text{C}]$).

Exemple 1.1.6 Considérons l'expérience aléatoire "le lancer du dé" $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Dans le cadre de cette expérience, on peut s'intéresser à différents "événements"
E_1 : l'événement : "Le résultat est paire" : $E_1 = \{2, 4, 6\}$ et $E_1 \in \Omega$
E_2 : l'événement : "Le résultat est supérieur ou égal à 3" : $E_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ et $E_2 \in \Omega$
E_3 : l'événement : "Le résultat est divisible par 3" : $E_3 = \{3, 6\}$ et $E_3 \in \Omega$. □

Définition 4 On appelle **événement** d'une expérience aléatoire tout sous-ensemble de l'ensemble fondamental Ω.

Pour le caractériser, on exprime une condition qui le détermine (pour le cas de E_1 de l'Exemple (1.1.6) : "Le résultat est paire") ou on énumère ses éléments ($E_1 = \{2, 4, 6\}$).
Un événement est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à ce sous-ensemble $E \in \Omega$.

Exemple 1.1.7 A la sortie d'un point de vente, on demande à 3 personnes si elles ont acheté un produit V.

Ceci constitue une expérience aléatoire qui peut être décomposée en 3 épreuves aléatoires individuelles, chaque épreuve ayant un ensemble fondamental $\Omega' = \{A, NA\}$ avec $A =$ acheteur $NA =$ non acheteur.

L'ensemble fondamental Ω, associé à l'expérience aléatoire «interroger 3 personnes sortant du point de vente», peut être défini en extension par

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & \{(A, A, A), (A, NA, A), (A, A, NA), \\ & \quad (A, NA, NA), (NA, A, A), (NA, NA, A), (NA, A, NA), (NA, NA, NA)\}.\end{aligned}$$

En effet, pour chaque épreuve, il y a 2 résultats possibles, ce qui fait que pour ces 3 épreuves il y a $2^3 = 8$ résultats possibles.

Dans ce cas Ω est un ensemble fondamental discret et fini puisqu'il convient 8 résultats.

Dans cet ensemble fondamental fini Ω on peut définir l'événement $E =$ «avoir exactement 2 acheteurs» avec

$$E = \{(A, NA, A), (A, A, NA), (NA, A, A)\}.$$

L'événement $F =$ "avoir un acheteur au 1^{er} tirage et un non acheteur au 2^{de}"

$$F = \{(A, NA, A), (A, NA, NA)\}. \qquad \square$$

Supposons que l'ensemble fondamental est fini : $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

Evénements remarquables

Définition 5 **Evénement élémentaire :** on appelle événement élémentaire tout sous-ensemble de Ω qui ne comprend qu'une seule éventualité, $E_i = \{w_i\}$. Les singletons $\{w_1\}, \{w_2\}, \ldots$ qui sont des parties de Ω ayant un seul élément.

Définition 6 **Evénement certain :** c'est l'événement représenté par Ω. C'est l'ensemble Ω qui est toujours réalisé. Cet événement se réalise à chaque épreuve.

Exemple 1.1.8 Un tombola est émise. Elle comporte 1000 billets. Parmi ceux-ci, on tire un seul billet gagnant. L'événement certain est de gagner le lot si on ait acheté tous les billets. □

Définition 7 **Evénement impossible :** c'est l'événement représenté par l'ensemble vide $\emptyset$, c'est l'événement qui n'est jamais réalisé.

Exemple 1.1.9 Une tombola est émise. Elle comporte 1000 billets. Parmi ceux-ci, on tire un seul billet gagnant.
L'événement pour une personne n'ayant acheté de billet, de gagner le lot est impossible. □

Définition 8 **Ensemble (famille) $\mathscr{T}$ d'événements :** nous désignerons par $\mathscr{T}$ l'ensemble de tous les événements associés à une expérience aléatoire. L'ensemble $\mathscr{T}$ des événements est donc inclus dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Il est souvent, mais pas toujours égal à tout $\mathcal{P}(\Omega)$: certaines parties pourraient ne pas pouvoir être décrites par une phrase concrète. Si Ω est fini, $\mathscr{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ - les parties de Ω. Lorsque Ω est infini, il n'est pas nécessaire de considérer tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ comme un événement. On peut restreindre $\mathscr{T}$ à des classes de parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ en leur imposant des conditions de stabilité :

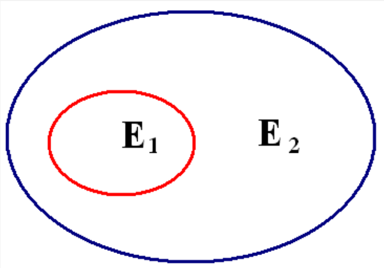
- $\mathscr{T}$ soit stable par réunion (pour prononcer "ou" dans la phrase), et par intersection ("et") ;
- $\mathscr{T}$ soit stable par passage au complémentaire (pouvoir parler de l'**événement** $\bar{A}$ **contraire** de A) ;
- contienne le vide (**événement impossible**) et Ω (**événement certain**).

1.2 Algèbre des événements

La théorie des ensembles nous permet d'introduire un certain nombre d'opérations sur les événements, éléments de $\mathscr{T}$. La définition de $\mathscr{T}$ permet d'affirmer que le résultat de toutes ces opérations définit lui-même un événement.

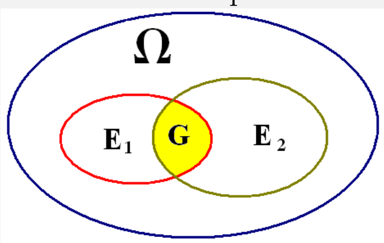
Définition 9 **Egalité :** deux événements E_1 et E_2 sont égaux ss'ils sont représentés par deux sous-ensembles composés des mêmes éléments.

Définition 10 **Implication :** un événement E_1 implique un événement E_2 ssi E_1 est inclus dans E_2 : $E_1 \subset E_2$.
E_2 se réalise donc chaque fois que E_1 se réalise.



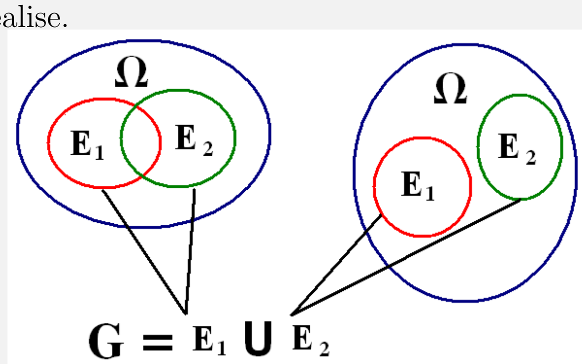
E_1 implique E_2
avoir comme conséquence

Définition 11 **Conjonction (ou intersection) :** la conjonction de deux événements (E_1 et E_2) est l'événement défini par le sous-ensemble $E_1 \cap E_2$ de Ω.
C'est l'événement qui se réalise lorsque E_1 et E_2 sont obtenus simultanément.



$G = E_1 \cap E_2 = E_1$ et E_2
$w \in G \iff (w \in E_1$ et $w \in E_2)$
L'intersection G des deux événements E_1 et E_2 figure en jaune sur le graphe ci-contre.

Définition 12 **Réunion :** la réunion de deux événements (E_1 ou E_2) est l'événement défini par le sous-ensemble $E_1 \cup E_2$.
C'est l'événement qui se réalise lorsque au moins un des deux événements E_1 ou E_2 se réalise.



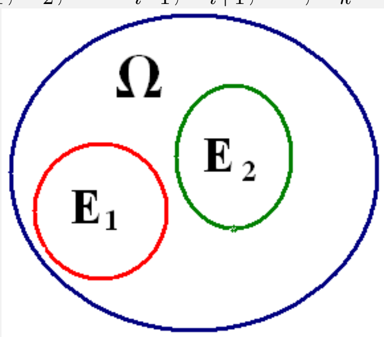
réunion de E_1 et E_2

Exemple 1.2.1 Pour les deux événements $E_1 = (30 \leq X \leq 36)$ et $E_2 = (34 \leq X \leq 48)$ la réunion $G = (E_1 + E_2)$ est $G = (E_1 \cup E_2) = (E_1 \text{ ou } E_2) = (30 \leq X \leq 48)$. □

Exemple 1.2.2 Sur le jeu de pile ou face (exemple 1.1.5 avec deux lancers : l'événement élémentaire "PP" (2 fois pile) est intersection de l'événement $A =$ "d'abord pile"$= \{PP, PF\}$, avec l'événement $B =$ "Pile au 2ème lancer"$=\{PP, FP\}$. L'événement réunion $A \cup B$ est l'événement "au moins une fois pile" ; l'événement complémentaire $\overline{A \cup B}$ de $A \cup B$ est l' événement "jamais pile", c'est-à-dire "deux fois face". □

$$A \cap B = \{PP\}; \quad A \cup B = \text{ "au moins 1 P"}; \quad \overline{A \cup B} = \text{ "jamais P"} = \{FF\}$$

Définition 13 Evénements incompatibles (ou mutuellement exclusifs) : Quelques événements E_1, E_2, E_3, ... E_k sont dits incompatibles s'ils n'ont aucune éventualité commune (ils ne peuvent pas être simultanément réalisés), c.à.d. $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i, j = \overline{1, k}$. L'apparition de l'un d'eux E_i, $i = 1, \ldots, k$ exclue l'apparition des autres $E_1, E_2, \ldots E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_k$.



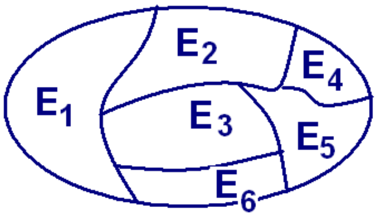
E_1 et E_2 sont incompatibles : $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

Exemple 1.2.3 Les événements $E_1 = (30 \leq X \leq 35)$ et $E_2 = (X$ est un multiple de 13) sont incompatibles. □

Exemple 1.2.4 Jet d'un dé. L'événement $A = \{$nombre unpaire$\}$ et l'événement $B = \{$le résultat est six $\}$ sont deux événements incompatibles. Dans le cas $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{6\}$. $A \cap B = \emptyset$ □

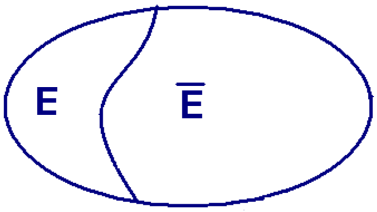
Définition 14 Evénements compatibles : Des événements qui peuvent surgir simultanément lors d'une expérience aléatoire s'appellent des **événements compatibles**. E_1 et E_2 sont des événements compatibles $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

Définition 15 Système complet d'événements : considérons une classe d'événements incompatibles (mutuellement exclusifs) tels que leur réunion donne Ω. Ces événements définissent une partition $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω.
Une telle classe est appelée *système complet d'événements*.



Les événements E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 forment un système complet d'événements.

Définition 16 **Complémentaire (ou contraire) :** Deux événements incompatibles qui forment un système complet d'événements, s'appellent des **événements complémentaires**. L'événement complémentaire de l'événement E est noté $\bar{E}$.
D'après la définition l'événement complémentaire $\bar{E}$ se réalise lorsque E ne se réalise pas. $E \cap \bar{E} = \emptyset$, $E \cup \bar{E} = \Omega$. E et $\bar{E}$ définissent une *partition* de Ω.



Les événements E et $\bar{E}$ forment un système complet.
E et $\bar{E}$ sont des événements complémentaires (contraires).

Définition 17 **Evénements indépendants :** Quelques événements sont dits indépendants si l'apparition de l'un d'eux ne change pas la possibilité de l'apparition des autres. Dans le cas contraire les événements s'appellent **dépendants**.

Exemple 1.2.5 Jet d'un dé. $A =$ "paire" ; $\bar{A} =$ "impaire" ; $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = 0$ - $\bar{A}$ contraire de A.
$B =$"paire" ; $C = \{1, 3\}$; $B \cap C = 0$, mais $B \cup C \neq \Omega$. B et C incompatibles, mais pas contraires.

Lois des opérations entre événements

Soit A, B, et C des événements quelconques. Les lois suivantes sont respectées :

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ - commutative
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$ - associative
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - distributive
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ - lois de Morgan.

Quelques propriétés de l'intersection ($\cap$)

$A \cap \bar{A} = \emptyset$	événements incompatibles
$\Omega \cap A = A$	élément neutre (Ω)
$\emptyset \cap A = \emptyset$	élément absorbant ($\emptyset$)
$A \cap B = B \cap A$	commutativité
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivité avec la réunion ($\cup$)

Quelques propriétés de la réunion ($\cup$)

$A \cup \bar{A} = \Omega$	événements complémentaires
$\emptyset \cup A = A$	élément neutre ($\emptyset$)
$\Omega \cup A = \Omega$	élément absorbant (Ω)
$A \cup B = B \cup A$	commutativité
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	associativité
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivité avec l'intersection ($\cap$)

Définition 18 La collection $\mathscr{T}$ des événements, munie des lois $\cup$, $\cap$, et "complémentaire" avec ces propriétés est appelée **une tribu**. C'est un exemple d'algèbre de Boole.

Pour achever de décrire le modèle mathématique associé à l'expérience aléatoire, il reste à introduire la notion de probabilité.

Test sur le chapitre : Espace fondamentale et événements

Vocabulaire fondamental

1. Qu'est-ce que signifient les symboles : Ω, $\emptyset$, $\bar{A}$, $A \cup B$, $B \cap A$

2. Quelles conditions doit vérifier une expérience pour être expérience aléatoire ?
Donnez la définition d'une expérience aléatoire.

3. Donnez la définition de l'ensemble fondamental. Que peut-être-t-il ?

4. Décrivez l'événement ? Donnez un exemple pour le jet d'un dé.

Algèbre des événements

5. Quand dit-on que deux événements sont incompatibles ?
Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ le sont-ils ?
Visualisez les deux événements précédents.

6. Qu'est-ce que l'événement complémentaire ?
   Donnez le contraire de l'événement $A =$ "toutes les boules choisies sont rouges".

7. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?

8. Ecrire l'ensemble fondamental (l'univers) de l'épreuve :
   (a) Le lancer du dé
   (b) Le lancer d'une monnaie
   (c) Le lancer trois fois d'une pièce de monnaie
   (d) La naissance d'un enfant
   (e) Le lancer de trois pièces de monnaie
   (f) On lance un dé jusqu'à ce qu'on aie un 6 sur la face supérieure. Ω est le nombre de jets ainsi réalisés

9. Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :
   (a) Seul A se réalise ;
   (b) A et B se réalisent, mais pas C.
   (c) les trois événements se réalisent ;
   (d) au moins l'un des trois événements se réalise ;
   (e) au moins deux des trois événements se réalisent ;
   (f) aucun ne se réalise ;
   (g) au plus l'un des trois se réalise ;
   (h) exactement deux des trois se réalisent ;
   (i) A ou B se réalisent, mais pas en même temps.

Explication : $\begin{array}{l} \text{"moins de"} = \text{"}<\text{"} ; \\ \text{"au moins"} = \text{"}\geq\text{"} ; \\ \text{"plus de"} = \text{"}>\text{"} ; \\ \text{"au plus"} = \text{"}\leq\text{"}. \end{array}$

Chapitre 2

Méthodes de dénombrement

Dénombrement, c'est répondre à la question : "Combien y-a-t-il d'éléments ?". Le dénombrement fait partie de l'analyse combinatoire, qui permet, grâce à ses formules, de connaître les groupements possibles des événements d'un ensemble. Elles nous permettra de calculer le nombre des éventualités équiprobables correspondant à une épreuve, par exemple le tirage de 13 cartes dans un jeu de 52 cartes.

Il y a plusieurs façons de regrouper les éléments d'un ensemble :

- selon qu'il y a ou non répétition d'éléments de l'ensemble,

  - **Dispositions avec répétition :** un élément peut intervenir dans la disposition plus d'une fois.

    Exemple 2.0.1 *La disposition* (a, b, a, a, c, b) *est disposition avec répétition. Les élément* a *et* b *participent plus d'une fois.*

  - **Dispositions sans répétition (simples)** Dispositions, dont chaque élément n'intervient qu'une seule fois.

    Exemple 2.0.2 *La disposition* (a, b, c, d, e, f) *est disposition simple. Il n'y a pas de répétition des éléments.*

- selon que l'on compte ou non de l'ordre des éléments - dispositions ordonnées et non ordonnées.

  - **Dispositions ordonnées :** deux dispositions contenant les mêmes éléments sont considérées comme différentes si ceux-ci n'occupent pas les mêmes places.

    Exemple 2.0.3 *Les deux dispositions* (a, b) *et* (b, a) *sont différentes s'il s'agit de dispositions ordonnées.*

  - Au contraire, deux **dispositions non ordonnées** sont considérées comme identiques pourvu qu'elles soient constituées par les mêmes éléments.

Exemple 2.0.4 *Les deux dispositions* (a, b) *et* (b, a) *sont identiques s'il s'agit de dispositions non ordonnées.*

Pour décrire une situation de dénombrement, on peut utiliser les techniques graphiques ou les formules de l'analyse combinatoire.

2.1 Outils graphiques de dénombrement

Les techniques graphiques de dénombrement sont : Tableaux à double entrés ; Diagrammes de Venn et Arbre

2.1.1 Deux variables indépendantes

Lorsque les donnés correspondant à ces deux variables ne dépendent pas l'une de l'autre.

Exemple 2.1.1.1 Dans une classe de 34 élèves, 20 ont 16 ans, 25 pratiquent l'anglais, dont 13 élèves de 16 ans.

Analyse : les deux variables ici sont l'age et la langue.

Comment représenter ces informations ? Deux modèles sont possibles : un tableau double entrées ou un diagramme de Venn.

1. **Tableau double entrée**

   Un tableau à double entrée permet de traiter **deux grandeurs** de manière simultanée : une indiquée en ligne et l'autre en colonne. Un nombre faisant intervenir ces deux grandeurs est inscrit dans chaque case située à l'intersection d'une ligne et d'une colonne. Ce tableau permet de compter les cases **vérifiant une certaine propriété**.

   On appellera :

   - A : l'ensemble des élèves pratiquant l'anglais
   - $\bar{A}$: l'ensemble des élèves ne pratiquant pas l'anglais
   - B : l'ensemble des élèves de 16 ans
   - $\bar{B}$: l'ensemble des élèves n'ayant pas 16 ans.

   Remarque : L'ensemble barré est l'ensemble complémentaire, c'est à dire les éléments qui ne possèdent pas le critère de cet ensemble.

   On obtient ainsi le tableau suivant en inscrivant les données fournies par l'énoncé.

	A	$\bar{A}$	Total
B	13		20
$\bar{B}$			
Total	25		34

Par différence ou somme, on obtient le tableau complète suivant :

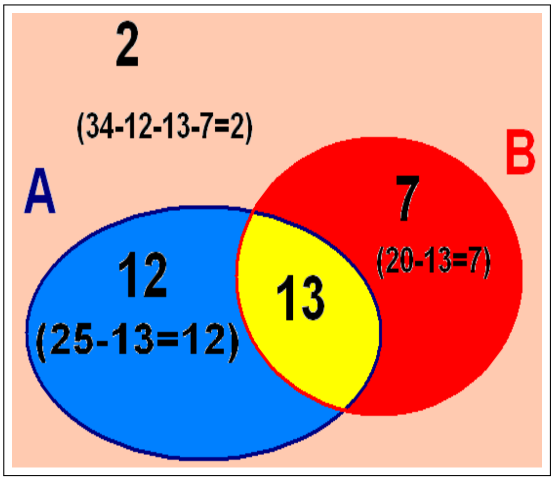
	A	$\bar{A}$	Total
B	13	7	20
$\bar{B}$	12	2	14
Total	25	9	34

L'autre possibilité consiste à faire des "patates" pour représenter la classe ainsi que ses différentes critères.

2. **Diagramme de Venn**

Un diagramme, tel qu'un diagramme de Venn, permet de mettre en évidence, sur une figure, un ensemble et certaines de ses parties.

Pour l'exemple considéré on obtient le diagramme suivant :



En bleu on a représenté les élèves pratiquants l'anglais, en brique les élèves de 16 ans, en jaune les élèves de 16 ans qui pratiquent l'anglais. La partie beige représente les élèves qui ne pratiquent pas l'anglais et ne sont pas à 16 ans.

- 13 élèves de 16 ans pratiquent l'anglais, on place 13 dans la partie jaune
- 25 élèves pratiquent l'anglais, dont 13 ayant 16 ans. Le nombre des élèves qui pratiquent l'anglais et n'ont pas 16 ans s'obtient en retranchant 13 de 25 : 25 - 13 = 12 élèves qui pratiquent l'anglais et n'ont pas 16 ans. On place 12 dans la partie bleue.
- De même on a 20 - 13 = 7 élèves qui ont 16 ans et ne pratiquent pas l'anglais. On place 7 dans la partie brique.
- Il y a donc 34 - 12 - 13 - 7 = 2 élèves qui n'ont pas 16 ans et ne pratiquent pas l'anglais. On place 2 dans la partie beige.

Exemple 2.1.1.2 Dans un groupe de 450 élèves, 30% des élèves sont en Première, 64% des élèves sont des filles et 75 filles sont en Première.
1. Traduire ces informations dans un tableau et compléter.
2. Quelle est la part des garçons dans les Première ?
3. Quelle est la part des Première parmi les garçons ?
4. Faire un diagramme correspondant à ces deux critères

Solution

1. Traduire ces informations dans un tableau et compléter.

   Comme on a des informations en valeurs absolues et en pourcentages, on traduira d'abord toutes ses informations en valeurs absolues.

$$\begin{array}{ll} 30\ \%\text{ de } 450 & 450 \times \dfrac{30}{100} = 135 \\ 64\ \%\text{ de } 450 & 450 \times \dfrac{64}{100} = 288 \end{array}$$

   On remplit alors un tableau que l'on complète par différence et somme.

   Les deux variables ici sont la classe et le sex.

   On appellera :

   - F : l'ensemble des filles
   - G : l'ensemble des garçons.

   - P : l'ensemble des élèves de Première
   - $\bar{P}$: l'ensemble des élèves des autres classes.

	F	G	Total
P	75	60	135
$\bar{P}$	213	102	315
Total	288	162	450

2. Quelle est la part des garçons dans les Première ?

   Dans les 135 Première, il y a 60 garçons. Donc la part des garçons dans les Première est :

$$\frac{60}{135} \times 100 \approx 44\%$$

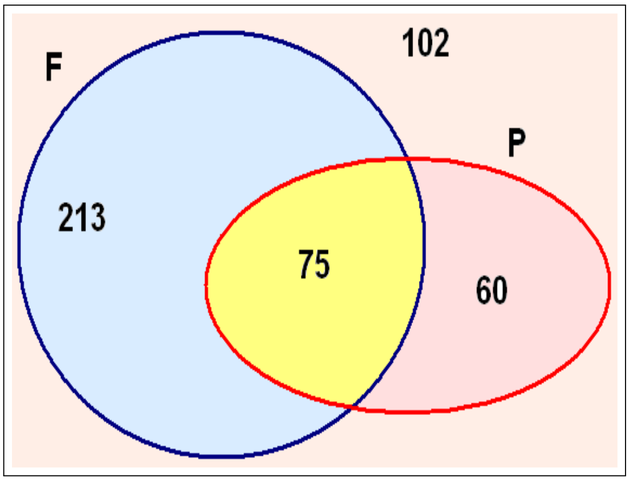
3. Quelle est la part des Première parmi les garçons ?

   Dans les 162 garçons, 60 sont en Première. Donc la part des Premières parmi les garçons est :

$$\frac{60}{162} \times 100 \approx 37\%$$

4. Faire un diagramme correspondant à ces deux critères

   On obtient alors :



2.1.2 Variables Conditionnées

Lorsqu'une variable dépend d'une autre, on parle de variable conditionnée.

1. **Arbre pondéré**

   Le premier niveau de l'arbre sera représenté par la variable non conditionnée et le second par la variable conditionnée.

   Il convient d'énoncer les règles qui régissent un arbre pondéré :

   - La loi des nœuds : la somme des coefficients autour d'un nœud est égal à 1
   - Lorsque l'on suit un chemin sur l'arbre, on multiplie les coefficients
   - Tous les coefficients sont exprimés par un nombre compris entre 0 et 1.

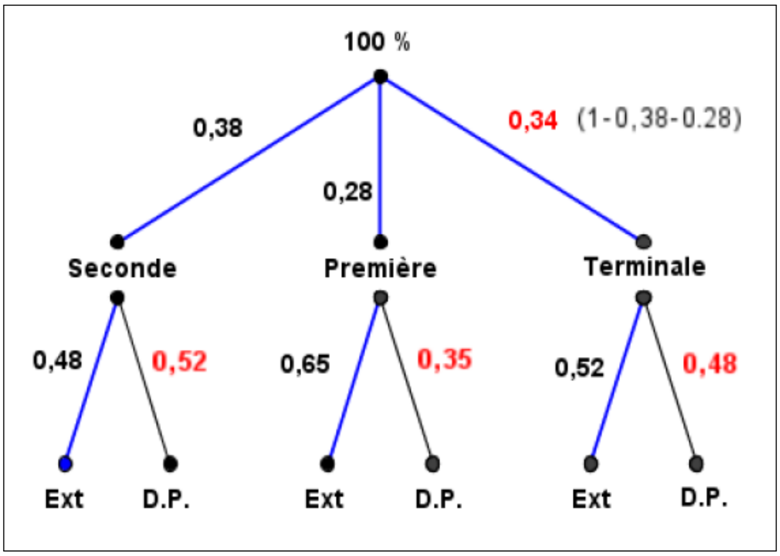
   Exemple 2.1.2.1 Dans un lycée de 2500 élèves, 38 % sont en classe de 2^{nde}, 28 % en 1^{re} et le reste en T^{le}. De plus, on sait que :

- 48 % des élèves de 2^{de} sont externes.
- 65 % des élèves de 1^{re} sont externes.
- 52 % des élèves de T^{le} sont externes.

Quel est le pourcentage d'externe ?

Analyse : Les deux variables sont la classe et le statut (externe ou demi-pensionnaire) des élèves. D'après les données, on connaît de statut des élèves par classe. Le statut est donc conditionné à la classe.

Comment représenter ces informations ? Un arbre pondéré. On obtient, en fonction des données, l'arbre suivant :



Pour déterminer le pourcentage d'externes, il faut tenir compte des trois chemins pour obtenir des externes. Le pourcentage d'externes est donc :

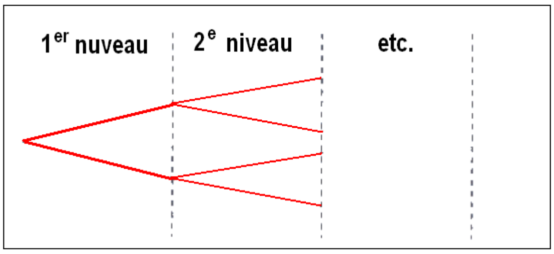
$$\begin{aligned}
\%\text{ d'externes } &= 100 \times 0.38 \times 0.48 + 100 \times 0.28 \times 0.65 + 100 \times 0.34 \times 0.52 \\
&= 100(0.38 \times 0.48 + 0.28 \times 0.65 + 0.34 \times 0.52) \\
&= 100(0.1824 + 0.128 + 0.1768) \\
&= 54.12\%
\end{aligned}$$

2. **Arbres de choix**

   Un arbre est une représentation graphique qui permet de dénombrer des choix d'éléments pris dans un certain ordre :

   - Au premier niveau, une première série de branches indique les choix d'un premier élément ;
   - Au deuxième niveau, une autre série de branches indique les choix d'un deuxième élément ;
   - Etc.

Pour dénombrer tous les choix, il suffit de compter les branches au bout de l'arbre.



Exemple 2.1.2.2 On dispose des chiffres 1 ; 5 ; 7. On veut former des nombres de trois chiffres en utilisant chacun des ces chiffres une fois et une seule. On se demande combien on peut en obtenir.

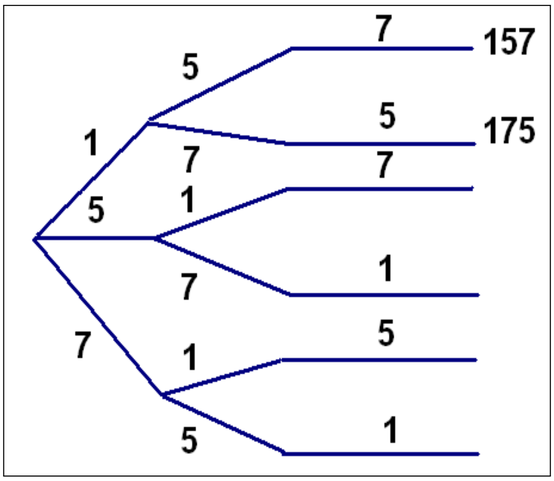
Dessiner un arbre de choix. Combien de nombres peut-on ainsi trouver ?

Solution : Le premier chiffre /le chiffre des centaines/ peut être soit 1, soit 5 ; soit 7 : il y a trois choix possibles.

L'arbre comporte trois niveaux. Le premier niveau comporte 3 branches, le deuxième deux branches pour chaque branche du premier niveau et le troisième niveau une branche pour chaque branche du deuxième niveau.

A l'arrivée, l'arbre comporte six branches.

Il y a donc six nombres possibles.



2.1.3 Synthèse

- Dans un exercice de dénombrement, il faut choisir le mode de représentation des données le plus adéquat.
- Quand on étudie simultanément deux caractères sur une population et qu'à chaque caractère correspond un couple de valeurs, on peut présenter les résultats du dénombrement sous forme de tableau à double entrée (on parle aussi de tableau croisé).

- Pour présenter les résultats d'un dénombrement, on peut également faire appel à un diagramme composé d'ensembles circulaires, chaque ensemble correspondant à un des caractères étudiés. Lorsque ces caractères sont incompatibles, les ensembles correspondants n'ont pas d'intersection.

- Lorsqu'au cours d'une étude, on a une succession de choix, on représente les différentes possibilités à l'aide d'un arbre. Il se peut que chaque choix soit pondéré ; les branches de l'arbre portent alors des coefficients et l'arbre est dit pondéré. C'est souvent le cas lorsque l'information est donnée sous forme de pourcentages ou de pourcentages de pourcentages. Il est alors nécessaire de connaître la «loi des nœuds» : la somme des coefficients affectés aux branches issues d'un même nœud vaut 1 ou 100 %. Il faut également savoir utiliser le «principe multiplicatif» : le coefficient affecté à un chemin est égal au produit des coefficients des branches qui le composent.

2.2 Formules d'analyse combinatoire

2.2.1 Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment dénombrer des objets dans un ensemble fini.

Exercice 2.2.1.1 Quelques situations de dénombrement :
1. De combien de façons peut-on placer les 12 élèves d'une classe si celle-ci comporte 12 places ?
2. Parmi les 20 coureurs d'un club cycliste, de combien de façons, les dirigeants peuvent-ils constituer une équipe de 5 coureurs ?

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ un ensemble de m éléments distincts (tous différents). $card(\Omega) = |\Omega| = m$ est appelé cardinal de Ω avec $m \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Formules d'analyse combinatoire. Notions

Définitions :

- **Arrangement :** groupement de p objets choisis parmi n objets, l'ordre des objets au sein du groupement ayant de l'importance,
- **Permutation :** groupement dans lequel tous les objets considérés sont repris.
- **Combinaison :** groupement de p objets choisis parmi n objets, l'ordre des objets au sein du groupement n'ayant aucune importance.
- **Groupement simple :** groupement dans lequel aucune répétition n'est admise.
- **Groupement avec répétition :** groupement dans lequel il y a de répétition de certain ou de tous les objets.

2.2.3 Arrangements simples et avec répétitions

Exemple 2.2.3.1 A l'aide des chiffres de 1 à 4 combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former ?
Énumérons les possibilités.

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

Nous obtenons 24 possibilités. Pour énumérer tous ces nombres, nous avons respecté un certain ordre : choix du premier chiffre, suivi du choix du second et enfin du troisième.

2.2.3.1 Arrangements simples sans répétitions, sans remise

Définition 19 On appelle **arrangement simple** A_m^p le nombre de manières de choisir p éléments **ordonnés** dans Ω **sans répétition** (on ne peut reprendre un élément déjà choisi) :

$$\boxed{A_m^p = m(m-1)\dots(m-p+1) = \frac{m!}{(m-p)!}.}$$

La première expression est le produit descendant de p entiers consécutifs à partir de m. La seconde est obtenue en multipliant en haut et en bas la première expression par $(m-p)!$. Étant une fraction non simplifiée, la première expression est préférable pour les calculs numériques.

Explication : Soient m éléments a,b,c,... pris p à p.
On peut décomposer cette opération en p étapes, (choix des éléments successifs).
La première étape (choix du premier élément), peut se réaliser de m façons.
La seconde étape (choix du second élément), peut se réaliser de $(m-1)$ façons car le premier élément ne peut plus être pris en compte. On parle de **tirage sans remise**.
Et ainsi de suite jusque l'étape p qui peut se réaliser de $(m-p+1)$ façons.
A chaque premier élément choisi, on peut associer tous les seconds éléments possibles lors du second choix et ainsi de suite pour les suivants. Nous sommes dans une situation de type multiplicatif.
Nous avons ainsi :$A_m^p = m.(m-1).\dots.(m-p+1)$. ($p$ produits)
Le nombre $m!$ appelé "la factorielle de m", avec la convention $0! = 1$, croit très vite avec m. Lorsque m est grand on peut l'approximer par la formule de Stirling[1] :

$$m! \approx \sqrt{2\pi m}(m/e)^m. \tag{2.1}$$

En utilisant les logarithmes, il est facile d'obtenir une bonne approximation de $n!$.

[1]Stirling James (1698-1770), mathématicien anglais

Exemple 2.2.3.2 On se propose d'estimer 20! en utilisant l'équation (2.1).

$$\begin{aligned}
\lg(20!) &\approx 20\lg 20 - 20\lg e + \frac{1}{2}\lg 20 + \lg\sqrt{2} + \frac{1}{2}\lg\pi \\
&\approx 20.5\lg 20 - 20\lg e + 0.39908 \\
&\quad /20,5 * LOG(20) - 20 * LOG(EXP(1)) + LOG(SQRT(2)) + LOG(PI())/2 \\
&\approx 18.38431521
\end{aligned}$$

D'ici $20! \approx 10^{18.38431521} = 2.423 \times 10^{18}$. L'erreur relative est de l'ordre de 4.2×10^{-3}.

Remarque 20 Deux arrangements simples sont différents dès que l'un contient un élément que l'autre ne contient pas ou s'ils contiennent les mêmes éléments placés dans un ordre différent.

Solution de l'Exemple 2.2.3.1
A l'aide des chiffres de 1 à 4 combien de nombres de 3 chiffres différents peut-on former ?

$$A_4^3 = 4.3.2 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24 \quad /PERMUT(4;3) = COMBIN(4;3) * FACT(3)/.$$

2.2.3.2 Arrangements avec répétitions (avec remise)

Définition 21 On appelle arrangement avec répétitions $\bar{A}_m^p$ le nombre de manières de choisir p éléments **ordonnés** dans Ω **avec répétition** (on accepte de reprendre plusieurs fois un élément déjà choisi) :

$$\boxed{\bar{A}_m^p = m^p.}$$

Exemple 2.2.3.3 Combien de nombre de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres de 1 à 4 en acceptant de prendre plusieurs fois le même chiffre ?
Il s'agit de choix de 3 éléments ordonnés dans l'ensemble $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ avec répétition $\Longrightarrow \bar{A}_4^3$:

$$\bar{A}_4^3 = 4^3 = 64 \quad /POWER(4;3)/.$$

Exercice 2.2.3.1 Arrangements simples et avec répétitions

1. Combien de nombres de 2 chiffres différents peut-on former avec les chiffres de 1 à 5 ?
2. La même question, mais en acceptant de prendre plusieurs fois le même chiffre.
3. Combien de mots (lisibles ou non) de 5 lettres distincts peut-on former avec les lettres de l'alphabet ?
4. Combien y a-t-il de ces mots si on peut utiliser plusieurs fois la même lettre ?

2.2.4 Permutations simples et avec répétitions

2.2.4.1 Permutations simples

Définition 22 On appelle permutation simple des éléments de Ω tout groupe des éléments de Ω placés dans un ordre déterminé. Le nombre P_m de ces permutations (manières d'ordonner (ou numéroter) les éléments de Ω) est :

$$\boxed{P_m = A_m^m = m(m-1)\dots(m-m+1) = m(m-1)\dots 1 = m!}$$

Exemple 2.2.4.1 Le nombre de manières de placer 8 convives autour d'une table est :

$$P_8 = 8! \quad \textbf{40 320} \text{ possibilités} \quad /PERMUT(8;8) = FACT(8)/$$

2.2.4.2 Permutations avec répétitions

Définition 23 On appelle permutation avec répétitions $\bar{P}_m^{r_1 r_2 \dots r_n}$ de m éléments parmi lesquels 1 élément se répète r_1 fois, un autre r_2 fois, ..., r_n fois $(r_1 + r_2 + \dots r_n = m)$, tout groupe de ces m éléments placés dans un ordre déterminé :

$$\boxed{\bar{P}_m^{r_1 r_2 \dots r_n} = \frac{m!}{r_1! r_2! \dots r_n!}}$$

En effet, les permutations de p objets identiques sont toutes identiques et ne comptent que pour une seule permutation.

Exemple 2.2.4.2 Considérons le mot "CELLULE". Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$$\bar{P}_7^{2\,3} = \frac{7!}{2!3!} = \textbf{420} \text{ mots possibles}$$

en considérant deux groupes de lettres identiques : L (3 fois) et E (2 fois).

Exercice 2.2.4.1 Permutations simples et avec répétitions

1. La première situation de dénombrement d'introduction (placement de 12 élèves d'une classe)
2. De combien de façons peut-on placer un groupe de 5 personnes sur un banc ?
3. Pour donner une friandise à chaque enfant d'un groupe de 10, on dispose de 3 Léo, 2 bounty et 5 chacha. De combien de façons peut-on effectuer la distribution ?

2.2.5 Combinaisons simples et avec répétitions

Exercice 2.2.5.1 Un groupe doit élire 2 étudiants parmi eux (15 étudiants). De combien de façons peuvent-ils le faire ?

2.2.5.1 Combinaisons simples ou sans remise

Définition 24 On appelle combinaison simple de m éléments pris p à p, $(p \leq n)$: C_n^p (lu "combinaison de p parmi n") le nombre de manières de choisir p éléments **non ordonnés** dans Ω **sans répétition** tous les groupes de p éléments choisis parmi les m donnés :

$$\boxed{C_m^p = \frac{A_m^p}{p!} = \frac{m!}{p!(m-p)!}.}$$

Explication : Pour calculer le nombre on utilise le principe de la division.

- Il y a A_m^p manières de tirer p objets parmi m *en les ordonnant* soit $A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$.
- Une fois les p objets tirés, il y a $p!$ *manières de les ordonner.*
- Il y a donc $\frac{A_m^p}{p!}$ manières de tirer p objets parmi m *sans* les ordonner.
- $C_m^p = \frac{A_m^p}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{m!}{(m-p)!}$

Exemple 2.2.5.1 Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 (main de poker) est une combinaison avec $p = 5$ et $m = 32$ $\quad /COMBIN(32; 5) = 201\,376/$.

Exemple 2.2.5.2 La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec $p = 5$ et $m = 50$ $\quad /COMBIN(50; 5) = 2\,118\,760/$.

Pour ces deux exemples, les objets tirés sont clairement distincts.

Exercice 2.2.5.2 Combinaisons simples

1. Dans le cas de la deuxième situation de dénombrement d'introduction (section de 5 coureurs dans un club de 20 cyclistes)
2. A la fin d'un repas rassemblant 15 amis, 3 sont chargés de la vaisselle. Combien de groupes différents peut-on former afin d'exécuter cette tâche ?

2.2.5.2 Combinaisons avec répétitions (avec remise)

Exemple 2.2.5.3 Une urne contient des boules de 5 couleurs différentes et contient au moins 4 boules de chaque couleur. On tire 4 boules de cette urne. Combien de possibilités de groupements a-t-on ?

Définition 25 On appelle combinaison avec répétition de m éléments pris p à p le nombre de manières de choisir p éléments **non ordonnés** dans Ω **avec répétition** $\bar{C}_m^p$. On ne s'occupe pas de l'ordre et chaque élément peut figurer plusieurs fois dans un même groupe :

$$\boxed{\bar{C}_m^p = C_{m+p-1}^p = \frac{(m+p-1)!}{p!(m-1)!}.}$$

Explication : Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise, on distingue 3 cas possibles :

- C_5^3 nombre de mots de lettres différentes et sans ordre
- $C_5^2 \times 2$ nombre de mots de 2 lettres différentes et une lettre redondante
- C_5^1 nombre de mots de 3 lettres identiques

d'où au total : $C_5^3 + 2C_5^2 + C_5^1 = C_7^3$ en utilisant la formule des combinaisons composées ou formule de Pascal.
En effet $C_5^3 + C_5^2 = C_6^3$ et $C_5^2 + C_5^1 = C_6^2$ d'où $C_6^3 + C_6^2 = C_7^3$ soit $C_7^3 = 35$ mots possibles de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres.
Ainsi $C_7^3 = C_{5+3-1}^3 = C_{n+p-1}^p$ avec $n = 5$ et $p = 3$.
Solution de l'Exemple 2.2.5.3

$$\bar{C}_5^4 = C_{5+4-1}^4 = C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70.$$

2.2.6 Synthèse

Quelles questions se poser lors de la résolution d'un problème d'application directe en analyse combinatoire ? Voir le tableau de Figure (2.1).
Ultérieurement, on rencontre des situations plus générales qui ne peuvent être résolues uniquement par le questionnement de ce tableau.

2.3 Mise au point : additionner ou multiplier ?

Lors du calcul des $\bar{A}_m^p$ on a déjà mis en évidence des situations de type multiplicatif.
Dans les cas de problèmes de dénombrement, on sera également souvent amenés à additionner les résultats. Les deux exemples ci-dessous permettent de comparer et distinguer ces situations.

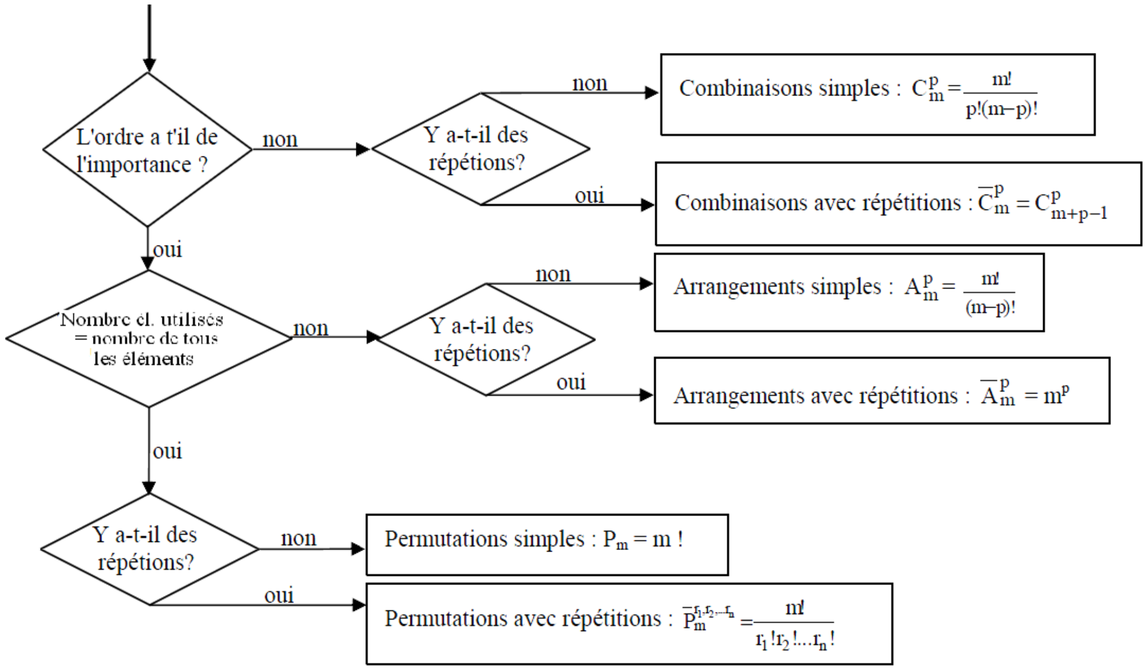


FIGURE 2.1 : Combinatoire

Exemple 2.3.1 Situations de type additif et multiplicatif

1. Une maîtresse de maison a 9 amis et souhaite en inviter 5 à dîner. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?

2. De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et de 2 femmes en les choisissant parmi 7 hommes et 5 femmes ?

Solution

1. Deux catégories distinctes d'invitations apparaissent : ou bien le couple est invité ou il ne l'est pas, c.à.d. que l'on est alors amené à choisir 3 invités parmi les 9 amis sans le couple donc parmi 7 ou à choisir 5 parmi 7 $\Longrightarrow$ un total de $C_7^3 + C_7^5$ possibilité. Il s'agit ici d'une situation de type additif.

2. Le problème revient à choisir un groupe de 3 hommes et un groupe de 2 femmes. Pour chacun de ces choix, il y a respectivement C_7^3 et C_5^2 possibilités. De plus, à chaque groupe de 3 hommes, on peut associer n'importe quel groupe de 2 femmes. Il y a donc $C_7^3 \,.\, C_5^2$ possibilités : il s'agit ici d'une situation de type multiplicatif.

2.3.1 Synthèse

Soit une opération qui peut se réaliser de N façons.
Situation additive : Si ces N façons peuvent se séparer en k catégories disjointes deux à deux

et que chacune des catégories peut se réaliser de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ façons $\Longrightarrow$: $N = n_1 + n_2 + \ldots n_k$.
En pratique : on décrit alors les catégories en les reliant par "ou" (ex. : on invite le couple "ou" on ne l'invite pas.)
Situation multiplicative : Si cette opération se décompose en k étapes successives, chacune des étapes pouvant se réaliser respectivement de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ façons, $\Longrightarrow N = n_1 \,.\, n_2 \,.\, \ldots \,.\, n_k$.
En pratique : On décrit alors la situation par une phrase du type : "à chaque groupe" (d'hommes) "on peut associer n'importe quel groupe" (de femmes) ... (selon les cas).

2.4 Propriétés des combinaisons

Les propriétés des combinaisons sont les suivantes :

1. Pour le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (lu "k parmi n") on a : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$
2. **La symétrie**
$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$
En effet, en raison de la symétrie de la formule :
$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!n!} = C_n^{n-p}.$$
Autrement dit, puisque l'ordre n'importe pas, choisir p éléments parmi n revient à choisir les $n-p$ éléments qui n'appartiennent pas à la combinaison.
3. **Combinaisons composées ou Formule de Pascal**
$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$
On peut aussi démontrer la relation dessus en notant que, si on désigne à l'avance un objet parmi n, les combinaisons possibles avec ces n objets pris p à p se décomposent en deux catégories :
• celles qui contiennent cet objet. Il y en a C_{n-1}^{p-1} ; pour compléter chaque combinaison il suffit en effet de choisir $(p-1)$ objets parmi les $(n-1)$ restants.
• celles qui ne contiennent pas cet objet. Il y en a C_{n-1}^p ; pour les obtenir il faut en effet choisir p objets parmi les $(n-1)$ qui sont différents de l'objet désigné.
4. **Application :**
   (a) **Développement du binôme de Newton**[2] $(a+b)^n$
   Connaissant les nombres C_n^p, on peut développer le binôme de Newton $(a+b)^n$:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

[2]Newton Issac (1642-1727), mathématicien et physicien anglais

Exemple 2.4.1 En donnant à n successivement les valeurs 1, 2, 3 on obtient :

$$\begin{array}{rcl}(a+b)^1 & = & 1a+1b \\ (a+b)^2 & = & 1a^2+2ab+1b^2 \\ (a+b)^3 & = & 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\end{array}$$

Remarque. En faisant, dans la formule du binôme de Newton :

$$a = b = 1,$$

on obtient le résultat remarquable suivant :

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

La somme des coefficients du développement du binôme de Newton est égale à 2^n.

(b) **Triangle de Pascal**[3]
La formule ci-dessus fournit une méthode commode de calcul par récurrence des valeurs de C_n^p. La matérialisation de cette méthode est appelée *triangle de Pascal.* L'idée du triangle de Pascal est de présenter les $\binom{n}{p}$ ou C_p^n sous forme de tableau à double-entrées.
En colonne, les valeurs de p et en ligne les valeurs de n.
Les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de 0, et la case correspond à la p-ème colonne et n-ème ligne est le coefficient $\binom{n}{p}$ ou C_n^p.
Or les formules précédentes montrent deux choses.

i. Il y a une symétrie dans ce tableau car

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

ii. Chaque terme est la somme du terme immédiatement supérieur et de celui qui se trouve à gauche de celui-ci. Si on connait les éléments de la ligne $(n-1)$, on connait automatiquement ceux de la ligne n par la formule

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p.$$

D'où le Triangle de Pascal :

Table 1. Triangle de Pascal

[3]Pascale Blaise (1623-1662) mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots$	$p-1$	p
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
$n-1$	1								$\ldots$	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^{p}
n	1								$\ldots$		C_n^p

Exemple 2.4.2 En utilisant le triangle de Pascal (*Table 1.)* on peut écrire

$$(a+b)^6 = a^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + b^6$$

5. **Nombre de solutions de l'équation**

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \tag{2.2}$$

a) Le nombre des solutions non-négatives de l'équation (2.2) est C_{n+k-1}^{k-1}.

b) Le nombre des solutions entières et positives de l'équation (2.2) est C_{n-1}^{k-1}.

Test sur le chapitre : Méthodes de dénombrement

Outils graphiques de dénombrement

1. S'il s'agit de dispositions ordonnées, les deux dispositions (a, b) et (b, a) sont

   a. différentes **b.** indépendantes **c.** identiques

2. Deux dispositions contenant les mêmes éléments, qui n'occupent pas les mêmes places, sont considérées comme différentes s'il s'agit de dispositions

   a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** identiques

3. Deux dispositions sont considérées comme identiques pourvue qu'elles soient constituées par les mêmes éléments quand il s'agit de dispositions

   a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** conditionnelles

4. Un tableau double entrée permet de traiter deux grandeurs de manière

   a. conditionnée **b.** simultanée **c.** successive

5. La représentation graphique pour deux variables indépendantes constitue :
   /choisissez toutes les réponses qui conviennent/

   a. arbre de choix **b.** arbre pondéré **c.** diagramme de Venn **d.** tableau double entrée

6. Complétez la définition de l'arbre de choix.
   Un arbre de choix est une représentation graphique qui permet de dénombrer . . . .

7. Donnez les règles qui régissent un arbre pondéré.

8. Lorsqu'on étudie une succession de choix, on représente les différentes possibilités à l'aide de
   /choisissez toutes les réponses qui conviennent/

   a. arbre **b.** diagramme de Venn **c.** tableau double entrée

Formules d'analyse combinatoire

9. Que mesurent les symboles A_m^p, C_m^p, $\bar{C}_m^p$?
   Calculer A_{10}^3, C_{10}^3, $\bar{C}_{10}^3$.

10. Les situations de dénombrement ci-dessous correspondent-elles à un tirage ordonnée ou non ordonné ? avec répétition ou sans répétition ?
    En déduire la réponse aux questions ci-dessous, d'abord sous forme symbolique puis sous forme numérique :

    (a) une famille de 6 personnes s'assoie sur un banc de 6 places. De combien de manières peut-elle le faire ?
    (b) même question mais le banc contient 10 places.
    (c) dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?
    (d) dans le désordre ?
    (e) on lance deux dés indiscernables. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
    (f) dans un ensemble à n éléments, combien y a-t-il de couples (x, y) d'éléments ?
    (g) de paires $\{x, y\}$ d'éléments ?

11. On doit former un groupe comprenant 2 hommes et 3 femmes sur la base d'un groupe plus large, formé de 5 hommes et 7 femmes. Quel est le nombre de possibilités si :

    (a) Le comité peut comprendre n'importe lequel des hommes et des femmes ?
    (b) Une femme particulière doit être membre du comité ?
    (c) Deux hommes particuliers doivent être exclu du comité ?

12. Développer $(a + b)^8$

Chapitre 3

Probabilité

La probabilité $P(E)$ d'un événement aléatoire E est un nombre dans $[0, 1]$ qui exprime la possibilité objective de réalisation de l'événement. Grâce à l'introduction du concept d'événement à partir de l'ensemble fondamental Ω, nous pouvons introduire le concept de probabilité par son aspect classique, fréquentiste et axiomatique. De façon générale, si E est un événement de $\mathscr{T}$, nous noterons $P(E)$ la probabilité que E se réalise au cours de l'expérience aléatoire à laquelle on a associé Ω et $\mathscr{T}$. Le nombre $P(E)$ devra être autant plus grand que E soit plus probable, donc la probabilité $P(E)$ devra être maximum lorsque E est l'événement certain et minimum lorsque E est l'événement impossible. On décide donc de poser $P(E) = 1$ lorsque E est certain et $P(E) = 0$ lorsque E est impossible. On aura donc toujours

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

3.1 Les différents interprétations de la notion de probabilité

3.1.1 Définition classique

L'approche classique fait l'hypothèse d'équiprobabilité, c'est-à-dire que tous les résultats ont des chances de réalisation égales. Sous cette hypothèse d'équiprobabilité, pour un ensemble fondamental contenant n résultats, chaque résultat a une probabilité $= \frac{1}{n}$.

On définit la probabilité $P(E)$ d'un événement E par le rapport

$$P(E) = \frac{\text{nombre de résultats favorables à la réalisation de } E}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

sous l'hypothèse d'équiprobabilité.

Propriétés

i La probabilité $P(E)$ d'un événement est toujours positive ou nulle : $0 \leq P(E) \leq 1$

ii Si un événement est certain, sa probabilité vaut 1 : $P(\Omega) = 1$

iii Si $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sont m événements mutuellement exclusifs /c.-à-d. incompatibles deux à deux $(E_i \cap E_j = \emptyset, i, j = 1, \ldots, m), i \neq j$/, alors

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_m).$$

TD - Exemple 1. : On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite (P, F, F, P)
Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$.
$P = 1/2^4 = 1/16$. □

Exemple 3.1.1.1 Prenons l'exemple du lancer de dé. Soit l'événement $E =$ « obtenir un nombre impair de points après le 1er lancer».

$$E = 1, 3, 5 = 1 \cup 3 \cup 5.$$

Les résultats élémentaires étant nécessairement exclusifs, la probabilité de E

$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6. \qquad \square$$

Mais l'hypothèse d'équiprobabilité est rarement vérifiée pour la plupart des expériences aléatoires en matière de gestion (prévision de la demande, de l'évolution des prix, du taux de change...).

De plus, lorsque Ω est infini, la probabilité d'un résultat est égale à $\frac{1}{\infty}$ et tend vers 0.

Celle d'un événement E constitué d'un nombre k de résultats est $P(E) = \frac{k}{\infty}$ et tend aussi vers 0.

Dans ces situations, la définition classique de la probabilité est inadéquate.

3.1.2 Définition fréquentiste

L'approche objective = fréquentiste = empirique repose sur l'hypothèse qu'il est possible de répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions aussi souvent que l'on veut.

Soit E un événement associé à une expérience aléatoire. On répète cette expérience n fois. On désigne par $n(E)$, nommé effectif ou fréquence absolue, le nombre de fois que E s'est réalisé au cours de ces n expériences. La fréquence relative nommée aussi seulement fréquence/ de E est $f_n(E) = \frac{n(E)}{n}$. On peut étudier le comportement de la fréquence $f_n(E)$ lorsque n augmente. On constate généralement que cette fréquence se stabilise autour d'une valeur limite qu'on identifie à la probabilité d'obtenir E.

L'approche fréquentiste définit la probabilité de E comme la limite de la fréquence relative de E quand n tend vers l'infini.

$$P(E) = \lim \frac{n(E)}{n}.$$

Comme on ne peut pas répéter une expérience un nombre infini de fois, la fréquence relative donne uniquement une approximation de celle-ci s'améliorant à mesure que le nombre n de répétitions de l'expérience grandit.

Exemple 3.1.2.1 Une mutuelle désire déterminer la probabilité de survenance d'un certain type d'accident afin de fixer sa politique de primes d'assurance. Elle effectue une enquête statistique sur une population de 100 000 adultes concernés répartis par classes d'âge. Il apparaît que 800 personnes ont eu ce type d'accident. On peut donc supposer que la probabilité de cet événement est égale à $\frac{800}{100000} = 8‰ = 0.8\%$ □.

Remarques :

- Pour des suite distinctes d'expériences on obtient en général des suites différentes de fréquences, Mais ces suites convergent vers la même valeur limite quand le nombre de répétition devient élevé.
  (*Loi des grands nombres.* J.Bernoulli : Si l'on répète N fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un événement A est P, la fréquence de cet événement au cours des N expériences, $\frac{k}{N}$ tend vers P lorsque N tend vers l'infini. $N \to \infty \Longrightarrow \frac{k}{N} \to P$.)
- $f_n(E)$ est généralement différente de $P(E)$ qui peut être considérée comme une fréquence théorique.
- Les propriétés de la probabilité classique restent valables.

3.1.3 Définition axiomatique de Kolmogorov

Soit Ω un ensemble fondamental associé à une expérience aléatoire. Soit d'autre part la famille $\mathscr{T}$ d'événements construite à partir de Ω. Définir la probabilité $P(E)$ d'obtenir un événement E consiste à associer à cet événement un nombre réel mesurant la vraisemblance de sa réalisation et satisfaisant aux axiomes (i-) - (iii-).

Définition 26 On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{T})$ une fonction P de $\mathscr{T}$ dans $[0, 1]$ telle que :
- $P(\Omega) = 1$
- pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles 2 à 2, on a :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

On dit alors qu'on a probabilisé l'espace des événements.

Définition 27 On appelle **espace probabilisé** le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

3.1.4 Propriétés des probabilités

Des propriétés (ii-) et (iii-), on déduit des autres propriétés des probabilités :

Additivité. Loi d'addition

- **Cas d'événements incompatibles = exclusifs**

Définition 28 Si A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n sont n événements **incompatibles deux à deux**

$(A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j)$ alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots + P(A_n)$

La probabilité de la **réunion** d'un ensemble fini ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités d'où :

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

TD - Exemple 2. : On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois F et deux fois P ?
Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$.
$A_1 = FFPP$, $A_2 = FPFP$, $A_3 = PFPF$, $A_4 = PPFF$, $A_5 = FPPF$, $A_6 = PFFP \Rightarrow$ nombre de cas favorables 6 $\Rightarrow P(\cup_6 A_i) = 6/16 = 3/8$. □

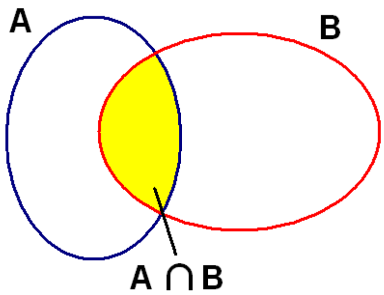
- **Cas de deux événements quelconques**

Définition 29 Si A et B sont deux **événements quelconques** $(A \cap B) \neq \emptyset$, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$$

Voici pourquoi :
Si nous faisons la somme de A et B nous comptons 2 fois l'intersection $A \cap B$. C'est la raison pour laquelle il faut la retirer une fois de la somme.

A et B étant deux événements quelconques, $(A \cap B) \neq \emptyset$, ces événements peuvent se décomposer comme la réunion de deux événements incompatibles :



Alors :
1. $A = \bar{A} \cup (A \cap B)$ avec $\bar{A} \cap (A \cap B) = \emptyset$, alors $P(A) = P(\bar{A}) + P(A \cap B)$ et $P(\bar{A}) = P(A) - P(A \cap B)$.
2. $B = \bar{B} \cup (A \cap B)$ avec $\bar{B} \cap (A \cap B) = \emptyset$ d'où $P(\bar{B}) = P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(A \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B) + P(\bar{B})$ d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple 3.1.4.1 On lance un dé à 6 faces, non pipé, on considère l'événement A : "le résultat est pair" et l'événement B : "le résultat est un multiple de trois".
On a alors :

$$\begin{aligned} A = \{2,4,6\} \quad \text{et } B = \{3,6\} \quad \text{donc } A \cup B = \{2,3,4,6\} \text{ et } A \cap B = \{6\} \\ \text{avec } P(A) = 3/6 \quad P(B) = 2/6 \quad P(A \cup B) = 4/6 \quad P(A \cap B) = 1/6 \end{aligned}$$

on vérifie alors que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/6 + 2/6 – 1/6 = 4/6$

Evénement contraire

Définition 30 Si A est un événement quelconque, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Voici pourquoi :
Nous avons vu précédemment que
$A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ Propriétés de la réunion et de l'intersection
$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ Propriétés d'additivité des probabilités
d'où $P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$ ainsi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple 3.1.4.2 La probabilité lors du lancer d'un dé non pipé d'obtenir "plus de 2" se traduit par $A = \{3,4,5,6\}$ et $\bar{A} = \{1,2\}$ d'où $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 2/6 = 4/6 = 2/3$.
Remarque : L'application de cette propriété est très utile lorsque le nombre d'événements élémentaires de A, k, est important et que le calcul des probabilités $P(A_i)$ est fastidieux (cas de la loi de Poisson). □

Evénement impossible

$$P(\emptyset) = 0.$$

Voici pourquoi :
Nous avons vu précédemment que

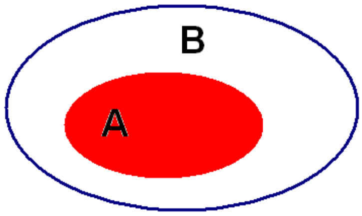
$$\begin{aligned} &\emptyset \cup \Omega = \Omega \quad \text{élément neutre} \\ &P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \quad \text{Propriétés d'additivité des probabilités} \\ &\text{d'où} \quad P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \quad \text{ainsi} \quad P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

Inclusion

Définition 31 Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$

Voici pourquoi :

$B = A \cup (B \cap \bar{A})$ avec A et $(B \cap \bar{A})$ disjoints, incompatibles, mutuellement exclusifs.
alors $P(B) = P[A \cup (B \cap \bar{A})] = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$.



3.1.5 Probabilité conditionnelle

La probabilité d'un événement aléatoire A considéré comme le résultat d'une expérience aléatoire, dépend d'un ensemble de conditions γ et représente une caractéristique numérique qui montre la fréquence de la réalisation de l'événement A lors d'un grand nombre d'essais. La probabilité change avec le changement des conditions γ. Cela permet avec le changement de l'ensemble de conditions γ d'augmenter ou de diminuer la probabilité d'un événement.
Très souvent il est nécessaire de trouver la probabilité de l'événement A en considérant l'information supplémentaire si un autre événement B s'est réalisé ou non. Ainsi on aboutit à l'a probabilité conditionnelle de l'événement A par rapport à l'événement B.

Exemple 3.1.5.1 Soit lors de n répétitions d' une expériences l'événement A s'est réalisé k fois, l'événement B - m fois, et l'événement $A \cap B$ - r fois.

Définition 32 Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement "A si B" ou "A sachant B", ou la probabilité de A étant donné que B est réalisé, le quotient

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

c'est-à-dire la relation entre le nombre r des essais, dont $(A \cap B)$ est surgi et le nombre de réalisation de l'événement B.

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ - s'appelle théorème de multiplication des probabilités. Il s'utilise souvent pour calculer la probabilité conditionnelle $P(A|B)$.

Pour l'exemple considéré 3.1.5.1 la probabilité de la réalisation de l'événement A, sachant que B est réalisé d'après la définition est $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{r}{m}$.

Remarque La probabilité P(A) est appelée la probabilité a priori et $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité a posteriori car sa réalisation dépend de la réalisation de B.
On observe les relations suivantes :

$$P(A/A) = 1$$

$$\text{Si } B \subset A, \text{ alors } A \cap B = B \text{ et donc } P(B/A) = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Exemple 3.1.5.2 Dans une urne il y a n boules, dont m blanches et $n-m$ noires. On tire une boule et sans remise on tire une deuxième. Quelle est la probabilité pour que la seconde boule soit blanche, si la première est :
a) blanche
b) noire.
Solution :
a) Si B = 'lors du premier tirage la boule est blanche', on a tirage sans remise, alors les cas favorables pour le deuxième tirage sont $(m-1)$ de tous les $(n-1)$ cas possibles. La probabilité conditionnelle $P(A|B)$ est $P(A|B) = \frac{m-1}{n-1}$.
b) De la même façon on obtient $P(A|\bar{B}) = \frac{m}{n-1}$.

Exemple 3.1.5.3 On jette un dé : si on sait que le nombre obtenu est pair, et en l'absence de toute autre information, la probabilité d'avoir 2 est intuitivement 1/3, celle d'avoir 1 est évidemment 0 : ce qui est en accord de la définition de $P(B|A)$. $|\Omega| = |\{1,2,3,4,5,6\}| = 6$, A = 'pair', B = '2', $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$, $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2\}$, $A\cap B = \{2\}$.

3.1.6 Indépendance statistique

Définition 33 A et B sont des événements indépendants ssi

$$P(A\cap B) = P(A).P(B).$$

C.-à-d. la probabilité de leur multiplication est égale au produit de leurs probabilités non-conditionnelles. Sinon les événements sont dépendants.

L'indépendance est une relation symétrique : si A est indépendant de $B \iff B$ est indépendant de A.

Théorème 1 A est dit indépendant de B ssi $P(A|B) = P(A)$.
Démonstration : a) Soient A et B deux événements indépendants. D'après les définitions d'événements indépendants et de probabilité conditionnelle on a

$$P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B),$$

$$P(A\cap B) = P(B)\,.\,P(A|B).$$

Alors on obtient $P(A)\,.\,P(B) = P(B)\,.\,P(A|B) \Longrightarrow P(A|B) = P(A)$.
b) suffisance : Si $P(A|B) = P(A)$, alors pour $P(A\cap B)$ on obtient

$$P(A\cap B) = P(B)\,.\,P(A|B) = P(A)\,.\,P(B).$$

Remarque : Il ne faut pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Supposons A et B à la fois indépendants et incompatibles/$A \cap B = \emptyset$/. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P(A \cap B) & = & P(A)P(B) \text{ indépendants} \\ P(A \cap B) & = & P(\emptyset) = 0 \text{ incompatibles} \end{array}$$

d'où nécessairement $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Exemple 3.1.6.1 (1) Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, non pipé, les deux événements : $A =$ " le résultat est pair" et $B =$ "le résultat est un multiple de trois" sont statistiquement indépendants.
En effet, soit $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{3, 6\}$ $A \cap B = \{6\}$
ainsi $P(A) = 3/6$ $P(B) = 2/6$ $P(A \cap B) = 1/6$
on vérifie alors que : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 3/6 \times 2/6 = 6/36 = 1/6$.

(2) Si l'on considère une famille de deux enfants, les deux événements : $A =$ "enfants de sexe différent" et $B =$ "au plus une fille" ne sont pas statistiquement indépendants.
En effet, l'espace probabilisé Ω, contient 4 événements élémentaires (si l'on considère une famille ordonnée), $\Omega = A \cup B = \{GG, GF, FG, FF\}$
avec $A = \{GF, FG\}$, $B = \{GG, GF, FG\}$ et $A \cap B = \{GF, FG\}$
d'où sous l'hypothèse d'équiprobabilité : $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$ et $P(A \cap B) = 1/2$
On vérifie alors que : $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = 1/2 \times 3/4 = 3/8 \neq 1/2$.

Exemple 3.1.6.2 On jet deux monnaies. Trouver la probabilité de l'événement $A \cup B$, ou $A =$ 'face de la première monnaie', $B =$ 'face de la seconde monnaie'.
Solution : De la propriété d'additivité on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Les événements A et B sont indépendants, c.-a-d.

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B).$$

Alors, comme $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, on a

$$P(A \cup B) = 1/2 + 1/2 - 1/4 = 3/4.$$

TD - Exemple 3. On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes.
A : la carte tirée est un pique. $P(A) = 13/52$.
B : la carte tirée est un roi. $P(B) = 4/52$.
$P(A \cap B) = 1/52$ (probabilité d'avoir le roi de pique).
$P(A).P(B) = \frac{13}{52}\frac{4}{52} = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52}$. Et nous avons bien $P(A \cap B) = P(A).P(B) \Longleftrightarrow$ A et B sont indépendants $\square$

Exemple 3.1.6.3 Dans un hypermarché, on a observé au cours d'une semaine donnée, le comportement de 1000 clients face à l'achat d'un certain produit. Les résultats de cette enquête sont résumés dans le tableau suivant :

	Acheteur (A)	Non acheteur ($\bar{A}$)	Total
Homme (H)	25	225	250
Femme (F)	175	575	750
Total	200	800	1000

L'ensemble fondamental Ω est donc discret et fini (il est représenté par les 1000 clients observés). Si l'on suppose l'équiprobabilité des résultats, on peut utiliser la définition classique de la probabilité et réaliser un *tableau de distribution des probabilités* selon les 2 caractères "sexe" et "comportement d'achat".

	A	$\bar{A}$	Total
H	$\frac{25}{1000} = 0.025$	$\frac{225}{1000} = 0.225$	0.25
F	$\frac{175}{1000} = 0.175$	$\frac{575}{1000} = 0.575$	0.75
Total	0.20	0.80	1

Nous pouvons vérifier certains propriétés de la probabilité :

- Si $\bar{E}$ est le complémentaire de E : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

  Ici $P(H)$ = probabilité "être homme" et $P(\bar{H}) = P(F)$ = probabilité "être femme". $P(\bar{H}) = 0.75 = 1 - 0.25$.

- Pour deux événements E_1 et E_2 tels que $E_1 \subset E_2$, alors $P(E_1) \leq P(E_2)$.

  Soit $F \cap A$ l'événement "être femme qui achète". Nous avons nécessairement $F \cap A \subset A$.

$$P(F \cap A) = 0.175 \quad P(A) = 0.20 \Rightarrow \text{ Si } F \cap A \subset A$$

$$\Rightarrow P(F \cap A) \leq P(A)$$

- $A \cup F$ = événement "être acheteur ou une femme". $A \cup F$ est composé de 2 événements compatibles

$$\Rightarrow P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F) = 0.20 + 0.75 - 0.175 = 0.775.$$

- $F \cup H$ = événement "être une femme ou un homme". $F \cup H$ est composé de 2 événements incompatibles qui en plus ici sont des événements contraires.

$$\Rightarrow P(F \cup H) = P(F) + P(H) = 0.25 + 0.75 = 1. \qquad \square$$

3.1.7 Probabilité de la conjonction d'événements - (théorème des probabilités composées, loi de multiplication)

Utilisé pour le calcul de $P(A \text{ et } B) = P(A \cap B)$.
Il faut donc que les 2 événements A et B soient compatibles/$A \cap B \neq 0/$. Le critère de distinction est la *dépendance* des événements. Les formules découlent immédiatement de la définition de la probabilité conditionnelle.

Théorème 2 . Théorème de probabilités composées
Événements indépendants : A et B sont des événements indépendants ssi

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Événements dépendants : Si A et B sont deux événements de $\mathscr{T}$:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$$

Si $A, B, C \in \mathscr{T}$ sont des événements compatibles, alors

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B).$$

Généralisation de la loi de multiplication des probabilités pour le cas de n événements quelconques :

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Exemple 3.1.7.1 On va calculer des probabilités attachées à l'expérience du tirage sans remise de 3 boules d'une urne ; on suppose que l'urne contient initialement 10 boules dont 5 rouges, 3 noires et 2 blanches. Calculons à l'aide des probabilités conditionnelles $P(RNB)$. On a :
$RNB = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
où $A_1 =$"la 1ère boule tirée est rouge", $A_2 =$ "la 2ème boule tirée est noire" et $A_3 =$ "la 3ème boule tirée est blanche".
Clairement $P(A_1) = 5/10 = 1/2$(toutes les boules ayant la même probabilité d'être d'abord tirées) ; de plus $P(A_2|A_1) = 3/9 = 1/3$ et $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 2/8 = 1/4$. D'où d'après la formule des probabilités composées :

$$P(RNB) = \frac{5}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}.$$

Exemple 3.1.7.2 Une série de 100 détails est contrôlé. La condition de rejet du lot est l'événement $\bar{A} =$ au moins un détail parmi 5 est défectueux. Trouver la probabilité de l'événement $\bar{A}$ si 5% des détails sont défectueux.
Solution :
L'événement A_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ signifie i-ème détail vérifié est conforme. Alors l'événement

$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ est contraire de $\bar{A}$. c-a-d l'accepte du lot. On cherche la probabilité $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. De la généralisation de la loi de multiplication de probabilité on a

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_5| \cap_{i=1}^{4} A_i)$$

Pour les probabilités conditionnelles on a :

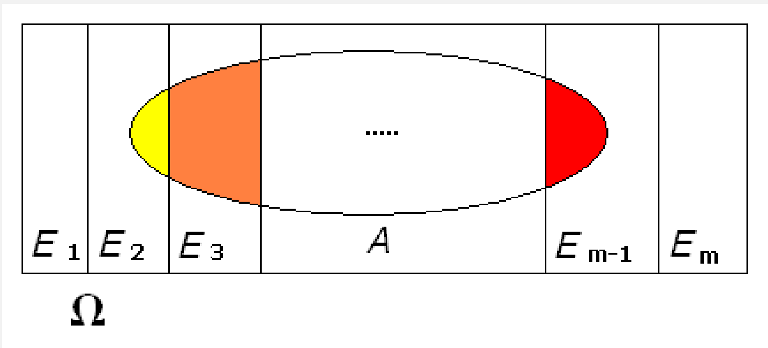
$$P(A_1) = \frac{95}{100},\ P(A_2|A_1) = \frac{94}{99};\ P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{93}{98};$$
$$P(A_4| \cap_{i=1} A_i) = \frac{92}{97};\ P(A_5| \cap_{i=1} A_i) = \frac{91}{96}.$$

Alors,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0.23$$

3.1.8 Théorème de la probabilité totale

Théorème 3 . Théorème de la probabilité totale.
Soit $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ une partition de l'ensemble fondamental d'événements Ω et A un événement quelconque, qui ne peut se réaliser qu'avec quelqu'un des E_i. On peut représenter cette situation par le schéma suivant :



On peut dire que

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap E_i) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_m).$$

Comme les événements $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, $\ldots$, $A \cap E_m$ sont mutuellement exclusifs, on a :

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{m} (A \cap E_i)) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \ldots + P(A \cap E_m).$$

Comme $P(A \cap E_i) = P(E_i)P(A|E_i)$

$$\Rightarrow P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + \ldots + P(E_m)P(A|E_m),$$

alors :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)P(A|E_i).$$

Exemple 3.1.8.1 Une population animale comporte 1/3 de mâles et 2/3 de femelles. L'albinisme frappe 6 % des mâles et 0,36 % des femelles. La probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos est ? :
Si $A = \{\text{mâle}\}$ et $\bar{A} = \{\text{femelle}\}$ constituent un système complet d'événements.
Soit $B = \{\text{albinos}\}$.
On a $P(A) = 1/3$, $P(\bar{A}) = 2/3$,
$P(B|A) = 6\% = 0.06$, $P(B|\bar{A}) = 0.36\% = 0.0036$.
sachant que $P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$
alors $P(B) = (0,06 \times 1/3) + (0,0036 \times 2/3) = 0,0224$
soit 2,24% d'albinos dans cette population.

3.1.9 Formule de Bayes

Théorème 4 .Théorème de Bayes. Formule des probabilités des causes.
Soit E_r un des événements de la partition de Ω.
La probabilité conditionnelle $P(E_r|A) = \frac{P(E_r \cap A)}{P(A)}$.
Comme $P(E_r \cap A) = P(E_r).P(A|E_r) \Rightarrow P(E_r|A) = \frac{P(E_r).P(A|E_r)}{P(A)}$.
Comme $P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i).P(A|E_i)$

$$\Rightarrow P(E_r|A) = \frac{P(E_r).P(A|E_r)}{\sum_{i=1}^{m} P(E_i).P(A|E_i)}.$$

3.1.10 Interprétation de la formule de Bayes

On considère les événements E_i comme des causes incompatibles (les E_i forment une partition de Ω), dont une et une seule est réalisée (E_r).

On considère A comme la conséquence des causes E_i (la probabilité que A soit la conséquence de $E_r = P(A|E_r)$).

Le théorème de Bayes donne la probabilité que, A étant réalisé, l'événement E_r en soit la cause $= P(E_r|A)$.

Exemple 3.1.10.1 Dans une usine, 4 machines fabriquent des pièces mécaniques dans les proportions suivantes : $M_1 = 40\%$, $M_2 = 20\%$, $M_3 = 15\%$, $M_4 = 25\%$. On sait que les taux de production de pièces défectueuses est de 4% pour M_1, 3% pour M_2, 2% pour M_3 et 3% pour M_4.

1. On choisit une pièce au hasard dans la production d'une journée. Quelle est la probabilité que cette pièce soit défectueuse ?

2. Quelle est la probabilité que la pièce choisie provienne de M_2 sachant qu'il s'agit d'une pièce défectueuse ?

1. Si nous reprenons les lettres :
   A = événement "la pièce choisie est défectueuse"
   E_1 = événement "la pièce choisie provient de M_1"
   E_2 = événement "la pièce choisie provient de M_2"
   E_3 = événement "la pièce choisie provient de M_3"
   E_4 = événement "la pièce choisie provient de M_4"

   E_1, E_2, E_3, E_4 constituent une partition de Ω (l'ensemble de la production journalière de l'usine).

   D'après l'énoncé nous avons : $P(E_1) = 0.4$; $P(E_2) = 0.2$; $P(E_3) = 0.15$; $P(E_4) = 0.25$; $P(A|E_1) = 0.04$; $P(A|E_2) = 0.03$; $P(A|E_3) = 0.02$; $P(A|E_4) = 0.03$.

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3) + P(E_4)P(A|E_4) \\ P(A) &= (0.4 \times 0.04) + ().2 \times 0.03) + (0.15 \times 0.02) + (0.25 \times 0.03) \\ &= 0.0325. \end{aligned}$$

   La probabilité d'avoir une pièce défectueuse est de 3.25%.

2. On nous demande de calculer $P(E_2|A)$. En utilisant le théorème de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P(E_2|A) &= \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3) + P(E_4)P(A|E_4)} \\ P(E_2|A) &= \frac{0.2 \times 0.03}{0.0325} = \frac{0.006}{0.0325} = 0.1846. \end{aligned}$$

   Si l'on sait que la pièce est défectueuse, il y a 18.4% de chance qu'elle provienne de M_2.

   Remarque

   Au départ, la probabilité a priori que la pièce provienne de M_2 était $P(E_2) = 0.2$.

   L'information supplémentaire (la pièce est défectueuse) vient modifier la probabilité de E_2 de telle sorte qu'a posteriori $P(E_2|A) = 0.1846$.

   Ceci permet dans la pratique la révision des probabilités en fonction des informations additionnelles disponibles (les probabilités a posteriori résultant d'une révision devenant les probabilités a priori pour la révision suivante). Cette procédure accroît la représentativité des probabilités utilisées et donc affine le travail réalisé. □

3.2 Ensemble fondamental infini

Ce sont des espaces Ω ayant une infinité non dénombrable de points, par exemple si w est un nombre réel, $\Omega = \mathbb{R}$.

L'ensemble fondamental ne sera plus $\mathcal{P}(\Omega)$ mais une famille $\mathscr{T}$ de sous-ensembles possédant les caractéristiques suivantes :

1. $\Omega \in \mathscr{T}$;
2. si $E \in \mathscr{T}$, alors $\bar{E} \in \mathscr{T}$;
3. si pour tout i $E_i \in \mathscr{T}$, alors $E = (\bigcup_i^\infty E_i) \in \mathscr{T}$, c.à.d. l'opération $\cup$ est dénombrablement permise.

Une telle famille est appelé une σ-algèbre (ou corps de Borel ou tribu). Dans ces conditions, une fonction réelle P, définie sur les éléments d'une $\sigma-$algèbre $\mathscr{T}$ de Ω est appelé probabilité si elle satisfait aux axiomes suivants :

1. Pour tout $E \in \mathscr{T} : P(E) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $\{E_1, E_2, \ldots\}$ est une suite d'événements de $\mathscr{T}$ telle que pour $i \neq j$ $E_i \cap E_j = \emptyset$, alors $P(\bigcup_i^\infty E_i) = \sum_i P(E_i)$.

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est encore appelé *espace probabilisée.*

Cette définition contient comme cas particulier le cas fini.
Dans le cas ou Ω est infini non dénombrable (par exemple $\Omega = \mathbb{R}$) il n'est plus possible d'associer une probabilité non nulle à des valeurs isolés. On associe une probabilité à des intervalles de $\mathbb{R}$.

Nous avons vu la nécessité de considérer une algèbre $\mathscr{A}$ qui admette l'opération limite monotone, admettant alors les réunions (ou sommes) et intersections dénombrables (d'où le préfixe σ).

3.3 Synthèse

Une loi de probabilité P sur un ensemble Ω doit être telle que l'on ait toujours :

$$0 \leq P(E) \leq 1 \tag{3.1}$$
$$P(\emptyset) = 0, \quad \text{et} \quad P(\Omega) = 1 \tag{3.2}$$
$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) \tag{3.3}$$
$$P(E_1 + \ldots + E_k) = P(E_1) + \ldots + P(E_k). \tag{3.4}$$

L'égalité (3.1) est connue sous le nom d'axiome d'additivité.

Se donner (à priori) une loi de probabilité sur un ensemble Ω, c'est, par définition, se donner un fonction P définie sur les sous-ensembles de Ω de telle sorte que les conditions (3.1) à (3.4) soient satisfaite.

Une étude théorique plus poussée montre qu'il ne faut pas, en général, attribuer un probabilité $P(E)$ à tout sous-ensemble E de Ω, mais seulement aux ensembles de Ω appartenant à une famille dite tribu. Elle montre en outre que la relation (3.4) doit être encore imposée à toute suite infinie $E_1, \ldots, E_k, \ldots$ de sous-ensembles de Ω deux à deux disjoints (axiome de σ-additivité).

Test sur le chapitre : Probabilité

1. Combien d'interprétations de la notion de probabilité connaissez-vous ?
2. Donnez la définition classique de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
3. Donnez la définition fréquentiste de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
4. Énoncez la loi d'addition de probabilité pour les événements A et B compatibles $(A \cap B) = \emptyset$.
5. Énoncez la loi d'addition de probabilité des événements incompatibles A et B.
6. Déduire la probabilité de A en fonction des probabilités des deux événement $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$.
7. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?
   Que vaut $P(A/B)$ lorsque A et B sont indépendants ?
8. Énoncez la loi de multiplication de probabilité pour les événements A et B indépendants.
9. Énoncez la loi d'addition de probabilité des événements incompatibles A et B.

Chapitre 4

Modèles d'urne

4.1 Différents modes de tirage

Dans de nombreuses situations, une expérience stochastique s'effectue en plusieurs étapes qui peuvent être regardées comme des expériences partielles. Dans le cas particulier où ces expériences partielles sont indépendantes les unes des autres, pour l'étude de tels cas, il est souvent avantageux de faire appel aux **modèles d'urne**, qui jouent un rôle privilégié dans la discussion de nombreuses questions en probabilité et en statistique.

Considérons donc une urne contenant n boules distinctes qui sont par exemple numérotées de 1 à n. De cette urne on extrait au hasard p boules, c'est-à-dire que l'on prélève un échantillon (aléatoire) de taille p ($p \leq n$). Cette opération peut se faire de plusieurs manières différentes :

- **successivement**
  On peut tirer les boules l'une après l'autre
  - **avec remise**
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne, avant de procéder au tirage suivant.
  - **sans remise**
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, sans qu'une boule tirée soit remise dans l'urne.
- **simultanément**
  On peut tirer les boules *simultanément*, c'est-à-dire d'un seul coup. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage successif sans remise.
- **exhaustif**
  On tire toutes les n boules de l'urne et on vide l'urne.
- **non exhaustif**
  On tire p boules des n boules de l'urne, où $p < n$.

Dans chacun de ces modes de tirage, les résultats obtenus sont de nature différente. Lorsque les boules sont tirées successivement, nous prenons souvent en compte de l'ordre d'apparition des boules et les tirages de n boules sont représentés par des listes ou des applications de l'ensemble des numéros de tirage dans l'ensemble des boules de l'urne. Dans le cas où les boules sont tirées simultanément, l'ordre d'apparition ne rentre pas en considération et nous représentons les tirages par des parties ou des combinaisons de l'ensemble des boules.

4.1.1 Tirages avec remise

Tirons successivement de l'urne n boules et notons au fur et à mesure le numéro de la boule tirée avant de la replacer dans l'urne. Nous obtenons alors une suite de n numéros éventuellement répétés.

1. **Tirages successifs de n objets parmi n objets avec remise**

   Exemple 4.1.1.1 Dans l'urne contenant les 10 boules numérotées de 0 à 9, on procède à un tirage de ces 10 boules *successivement*, et avec remise. Le nombre de résultats possibles s'obtient par :

   $$\underset{\substack{\text{choix du}\\ \text{1-er chiffre}}}{\overset{10}{\uparrow}} \times \underset{\substack{\text{choix du 2-ème chiffre}\\ \text{puisque la boule précédemment}\\ \text{tirée a été remise}}}{\overset{10}{\uparrow}} \times \ldots \times 10$$

   On obtient : 10 facteurs égaux à 10 soit 10^{10}.

   Dans le cas général, pour n éléments : n^n est le nombre de résultats possibles.

2. **Tirages successifs de p objets parmi n objets avec remise**

   Le modèle de référence dans ce cas est celui d'une urne contenant n jetons numérotés dont on extrait p jetons, en remettant après chaque tirage le jeton tiré dans l'urne. Combien de résultats différents peut-on obtenir lors de cette expérience ?

   On peut fabriquer un arbre ou simplement tenir le raisonnement suivant :

   pour le 1^{er} jeton, on a n possibilités ;
   pour le 2^e jeton, on a n possibilités ;
   ... ;
   pour le p^e jeton, on a n possibilités.

   On en déduit que le nombre de résultats possibles est :

   $$\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p = \bar{A}_n^p.$$

4.1.2 Tirages sans remise

Extrayons successivement de l'urne p boules et notons au fur et à mesure le numéro de la boule tirée sans la replacer dans l'urne. Nous obtenons alors une suite de p numéros tous différents. Nous pouvons représenter cette suite formée de p numéros distincts de 1 à n par une p-liste distincte de $[1, n]$ ou d'un arrangement (sans répétition) de p éléments dans l'ensemble $[1, n]$. Nous obtenons au total A_n^p tirages différents.

1. **Tirages successifs de p éléments parmi n**

   Le modèle de référence dans ce cas est celui d'une urne contenant n jetons numérotés dont on extrait p jetons, en conservant le jeton après chaque tirage. Combien de résultats différents peut-on obtenir lors de cette expérience ? Là encore, on peut fabriquer un arbre ou recommencer notre raisonnement :
   pour le 1^{er} jeton, on a n possibilités ;
   pour le 2^e jeton, on a $n-1$ possibilités ;
   ... ;
   pour le p^e jeton, on a $n-p+1$ possibilités.
   On en déduit que le nombre de résultats possibles est :

   $$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = A_n^p;$$

   où $n!$ est le nombre $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \to 1$.

2. **Tirages successifs de n éléments parmi n**

   Si l'on fait n tirages sans remise dans l'urne et que l'on vide l'urne, alors le nombre de résultats possibles est $n!$. C'est aussi le nombre de façons de ranger n objets les uns par rapport aux autres

   $$A_n^n = P_n = n!$$

4.1.3 Tirages simultanés

Extrayons simultanément de l'urne p boules. Nous pouvons représenter cette poignée de p boules de $[1, n]$ par une partie à p éléments de $[1, n]$, c'est-à-dire une combinaison (sans répétition) de p boules de l'ensemble $[1, n]$. Si l'on extrait p jetons simultanément (c'est-à-dire sans ordre ni répétition) de l'urne contenant n jetons numérotés, le nombre de tirages possibles ou nombre de combinaisons est alors :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1} = C_n^p.$$

Synthèse

Types de tirages	**Ordre**	**Répétitions d'éléments**	**Dénombrement**
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$\bar{A}_n^p = n^p$ arrangements avec répétition
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons

Cas possibles lors des différents modes de tirages

mode de tirage	exhaustif	non exhaustif
avec remise	$\bar{A}_n^n = n^n$	$\bar{A}_n^p = n^p$
sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_n^n = P_n = n!$
simultané	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$	—

Définition 34 Soit $p \in \mathbb{N}$. On appelle $p-$liste d'éléments de E toute **suite ordonnée** de p éléments de E.

4.2 Urne contenant deux sortes de boules

Dans une urne contenant des boules de deux types : A et B, il y a N_1 boules de type A et N_2 boules de type B. Posons $N_1 + N_2 = N$. Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à prélever n boules parmi les N boules de l'urne. On peut envisager plusieurs façons de prélever (tirer) ces n boules : avec remise, sans remise, simultanément.

Il se pose alors le problème suivant : comment déterminer la probabilité $P(E_k)$ de l'événement $E_k =$ "prélever k boules du type A parmi les n boules tirés dans les différents cas".

A cette fin, nous considérons séparément chaque des trois méthodes de tirage présentées ci-dessus.

- Lorsque les boules sont prélevées **avec remise**, on a affaire à une succession de n expériences partielles qui sont identiques et indépendantes l'une de l'autre. On obtient alors
$$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$
où $p = N_1/N$ est la probabilité qu'une boule tirée soit de type A ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Pour démontrer ce résultat, notons F_i l'événement qu'une boule de type A est prélevée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ($i = 1, 2, \ldots, n$). Une réalisation particulière de E_k est alors donnée par
$$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap \bar{F}_{k+1} \cap \ldots \cap \bar{F}_n,$$
événement élémentaire dont la probabilité est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$. Cette probabilité n'est pas modifiée par des permutations des n événements F_i et $\bar{F}_j$. Le nombre de ses permutations, c'est-à-dire le nombre de réalisations distinctes de l'événement E_k est égal à $\bar{P}_n^{k,n-k} = \binom{n}{k}$, d'où le résultat ci-dessus.

- Lorsqu'on effectue un tirage de n boules **sans remise**, les n expériences partielles dont est composé ce processus, à savoir les prélèvements des n boules, ne sont ni identiques, ni indépendantes l'une de l'autre. En effet, la probabilité de prélever une boule de type A varie constamment au cours du tirage et dépend des résultats déjà obtenus. En faisant appel au théorème de multiplication /$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ - A, B - événements indépendants ; $P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$ - événements dépendants/ on peut démontrer que la probabilité d'avoir exactement k boules de type A parmi les n boules tirées est donnée par
$$P(E_k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$
où $\max(0, n - N + N_1) \leq k \leq \min(N_1, n)$.

  Démonstration.

  Le choix de k boules du type A et $n-k$ boules du type B s'effectue d'après l'expression
$$\underbrace{\frac{N_1}{N}.\frac{N_1-1}{N-1}.\frac{N_1-2}{N-2}\cdots\frac{N_1-k+1}{N-k+1}}_{k}.\underbrace{\frac{N_2}{N-k}.\frac{N_2-1}{N-k-1}\cdots\frac{N_2-n+k+1}{N-n+1}}_{n-k} =$$
$$= \frac{\frac{N_1!}{(N_1-k)!}.\frac{N_2!}{(N_2-n+k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{A_{N_1}^k.A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}.$$
  Choix des emplacements : $\bar{P}_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$.
  D'ici $P(E_k) = \bar{P}_n^{k,n-k}\frac{A_{N_1}^k.A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n} = \frac{C_{N_1}^k.C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$ comme $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$.

- Lorsqu'on tire les n boules **simultanément**, on peut modéliser ce phénomène stochastique par la loi de probabilité $P(E_n) = \frac{n}{N}$ /événements équiprobables/. Les calculs du nombre de cas possibles et du nombre de cas favorables à la réalisation de E_k montrent que la probabilité de cet événement est la même que celle obtenue pour le tirage sans remise.

Le modèle du tirage **sans** remise correspond certainement le mieux à la manière dont on prélève généralement des objets d'un ensemble donné lors d'une application concrète. D'un autre côté, le modèle du tirage **avec** remise possède des propriétés mathématiques beaucoup plus simples et se prête par conséquent mieux à des investigations probabilistes. De plus, on peut montrer que

$$\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

si $N \to \infty$, $N_1 \to \infty$ tel que $N_1/N \to p$. Ceci signifie que le modèle sans remise se rapproche du modèle avec remise si l'effectif N de l'urne est grand par rapport à la taille n de l'échantillon.

Exemple 4.2.1 (problème de garantie) [3] Un article est produit en masse : on sait qu'en moyenne 10% des pièces sont défectueuses. L'article est vendu dans des emballages contenant chacun dix pièces. Le fournisseur garantit qu'il y ait au moins huit pièces non-défectueuses dans chaque emballage. Quelle est la probabilité que cette garantie puisse être tenue ?

On peut assimiler cette situation à un tirage sans remise de dix boules d'une urne comprenant un nombre infiniment grand de boules dont 90% sont de type A. La probabilité que la garantie du fournisseur puisse être tenue se calcule alors par

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_8 \cup E_9 \cup E_{10}) = \sum_{k=8}^{10} P(E_k) \\ &= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} 0.9^k 0.1^{10-k} = 0.9298. \end{aligned}$$

avec E_k= “un emballage comprend k bonnes pièces”. □

Synthèse

Probabilité de prélever k boules du type A parmi les n tirées d'une urne contenant deux sortes de boules. N_1 boules de type A ; N_2 de type B ; $N_1 + N_2 = N$.
E_k =“prélever k boules du type A parmi les n tirées”
$p = \frac{N_1}{N}$

	avec remise	sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	—
choix d'éléments	$p^k.(1-p)^{n-k}$	$\frac{A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$
$P(E_k)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{\binom{N_1}{n}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$

4.2.1 Probabilité d'obtention d'un nombre donné de boules

Considérons une urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes. Supposons les couleurs numérotées de 1 à k. Pour chaque couleur i de $[1, k]$, on note N_i le nombre de boules de la couleur i. Pour tout entier i compris entre 1 et k désignons par $p_i = \frac{N_i}{N}$ la proportion de boules de la couleur i dans l'urne. On a la relation $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
Intéressons nous à la répartition des couleurs dans le tirage obtenu, c'est-à-dire au nombre de boules obtenues dans chaque couleur.
Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Considérons l'ensemble $A(n_1, \ldots, n_k)$ des tirages contenant exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,. . ., et n_k boules de la couleur k. Pour chacun des modes de tirage précédents, nous allons déterminer la probabilité de cet événement $A(n_1, \ldots, n_k)$.

Tirage avec remise

Théorème 5 Dans le cas d'un tirage avec remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} . p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$$

Démonstration. Reprenons l'urne $\mathscr{U}$ précédente et effectuons un tirage de n boules avec remise. Considérons Ω l'ensemble formé des n-listes de $[1, N]$. Le tirage s'effectuant au hasard, il y a équiprobabilité sur l'univers Ω. Il existe N^n résultats possibles.
L'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$ se réalise lorsque nous obtenons une n-liste constituée de n_1 boules de la couleur 1, n_2 de boules de la couleur 2,. . . et n_k de boules de la couleur k.
Pour former une telle n-liste, nous devons choisir les emplacements des couleurs, puis choisir les boules dans chaque couleur.
1. Pour choisir les emplacements des couleurs, nous choisissons n_1 emplacements parmi les n

de la n-liste qui seront occupés par des boules de couleur 1, n_2 emplacements parmi les $n-n_1$ restants qui seront occupés par des boules de couleur 2,..., enfin nous choisissons les derniers emplacements qui seront occupés par des boules de la couleur k et il en reste $n-n_1-\ldots-n_{k-1}=n_k$.
Nous obtenons au total

$$C_n^{n_1}\,.\,C_{n-n_1}^{n_2}\,.\,\ldots\,.\,C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

choix possibles d'emplacement des couleurs.
2. Les places des couleurs étant choisies, nous complétons pour tout entier i compris entre 1 et k, les places occupées par les boules de couleur i par une n_i-liste de boules de couleur i et il y a $N_i^{n_i}$ n_i-listes de $[1,N]$. Donc au total $N_1^{n_1}N_2^{n_2}\ldots N_k^{n_k}$ façons de compléter les emplacements réservés à chacune des couleurs par des boules.
Nous obtenons finalement

$$N_1^{n_1}N_2^{n_2}\ldots N_k^{n_k}\,.\,\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$

tirages constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 de boules de la couleur 2,... et n_k de boules de la couleur k.
Par conséquent la probabilité de l'événement $A(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ est égale à :

$$P(A(n_1,n_2,\ldots,n_k))=\frac{\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}N_1^{n_1}N_2^{n_2}\ldots N_k^{n_k}}{N^n}=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\,.\,\frac{N_1^{n_1}N_2^{n_2}\ldots N_k^{n_k}}{N^n}$$

Or $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ et $\frac{N_i}{N}=p_i$ donc nous pouvons écrire que $N^n=N^{n_1}\,.\,N^{n_2}\,.\,\ldots\,.\,N^{n_k}$ et donner la probabilité sous la forme :

$$P(A(n_1,n_2,\ldots,n_k))=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\,.\,\frac{N_1^{n_1}N_2^{n_2}\ldots N_k^{n_k}}{N^{n_1}N^{n_2}\ldots N^{n_k}}=\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}\,.\,p_1^{n_1}\ldots p_k^{n_k}.$$

Tirage sans remise

Théorème 6 Dans le cas d'un tirage sans remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1,\ldots,n_k))=\frac{C_{N_1}^{n_1}\,.\,C_{N_2}^{n_2}\,.\,\ldots\,.\,C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Démonstration. Reprenons l'urne $\mathscr{U}$ précédente et effectuons un tirage de n boules sans remise. Considérons Ω l'ensemble formé des n-listes distinctes de $[1,N]$. Le tirage s'effectuant au hasard, il y a équiprobabilité sur l'univers Ω. Il existe A_N^n résultats possibles.
L'événement $A(n_1,\ldots,n_k)$ se réalise lorsque nous obtenons une n-liste distincte constituée de n_1 boules distinctes de la couleur 1, n_2 distinctes de boules de la couleur 2,... et n_k distinctes de boules de la couleur k.
Pour former une telle n-liste distincte, nous devons choisir les emplacements des couleurs, puis choisir les boules dans chaque couleur.

1. Pour le choix des emplacements des couleurs, nous procédons de même que dans le cas d'un tirage avec remise, et nous obtenons au total

$$C_n^{n_1} \,.\, C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-\ldots n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

répartitions possibles des couleurs dans les emplacements.
2. Les places des couleurs étant choisies, nous complétons pour tout entier i compris entre 1 et k, les places occupées par les boules de couleur i par une n_i-liste distincte de boules de couleur i et il y a $A_{N_i}^{n_i}$ n_i-listes distinctes de $[1, N_i]$. Donc au total $A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}$ façons de compléter les emplacements réservés à chacune des couleurs par des boules distinctes. Nous obtenons donc au total

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!.\ldots n_k!} A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}$$

tirages constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 de boules de la couleur 2,... et n_k de boules de la couleur k.
Par conséquent la probabilité de l'événement $A(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ est égale à :

$$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k)) = \frac{\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n} = \frac{n!}{n_1!.n_2! \ldots n_k!} \,.\, \frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme :

$$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k)) = \frac{\frac{A_{N_1}^{n_1}}{n1!} \,.\, \frac{A_{N_2}^{n_2}}{n2!} \,.\, \ldots \,.\, \frac{A_{N_k}^{n_k}}{nk!}}{\frac{A_N^n}{n!}} = \frac{C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

Nous obtenons la même probabilité que dans le cas d'un tirage exhaustif.

Tirage simultané

Théorème 7 Dans le cas d'un tirage simultané de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

Démonstration. Reprenons l'urne $\mathscr{U}$ précédente et effectuons un tirage simultané de n boules. Considérons Ω l'ensemble formé des parties à n éléments de $[1, N]$. Le tirage s'effectuant au hasard, il y a équiprobabilité sur l'univers Ω. Il existe C_N^n résultats possibles.
L'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$ se réalise lorsque nous obtenons un ensemble de n boules constitué de n_1 boules distinctes de la couleur 1 choisies parmi N_1, de n_2 distinctes de boules de la couleur 2 choisies parmi N_2,... et de n_k distinctes de boules de la couleur k choisies parmi N_k.
Pour former un tel ensemble, nous choisissons pour tout entier i compris entre 1 et k, une partie de n_i boules prises parmi les N_i de la couleur i. Au total, nous obtenons $C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}$ cas favorables à la réalisation de l'événement $A(n_1, \ldots n_k)$. On en déduit la probabilité de cet événement :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Synthèse

Urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes. N_i le nombre de boules de la couleur i ; $p_i = \frac{N_i}{N}$ proportion de boules de la couleur i dans l'urne ; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ et $A(n_1, \ldots, n_k)$ l'ensemble des tirages contenant exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,…, et n_k boules de la couleur k.

Probabilité de l'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$:

	avec remise	sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	—
choix d'éléments	$p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$	$\frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1}.C_{N_2}^{n_2}\ldots C^{n_k} N_k}{C_N^n}$
$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k))$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$

4.2.2 Schéma (processus) de Bernoulli

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succès) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$. Répétons n fois cette expérience. On a un schéma (ou processus) de Bernoulli si les conditions suivantes sont satisfaites :

- les expériences successives sont indépendantes les unes des autres
- la probabilité d'obtenir S reste égale à p lors de chaque répétition.

On peut s'intéresser au nombre de fois que S s'est réalisé au cours des n expériences.

$$P(S \text{ se réalise } k \text{ fois}) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Un tel schéma est décrit par un modèle d'urne et des tirages avec remise.
Il est évident qu'il existe un nombre k, tel que l'expression $C_n^k p^k q^{n-k}$ atteint sa valeur maximale. Notons cette valeur par m. Il est appelé **le nombre le plus probable**. Le nombre le plus probable est défini comme le nombre entier dans les limites $n \,.\, p - q \leq m \leq n \,.\, p + p$.

Exemple 4.2.2.1 Une machine produit une sorte de détails. La probabilité qu'un détail soit bon est 95%. On choisit 8 détails au hasard. Trouver la probabilité 6 détails parmi les 8 détails

choisis d'être bons.
On utilise la formule de Bernoulli avec $p = 0.96$, $q = 0.05$, $n = 8$ et $k = 6$:

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} = C_8^6 \,.\, 0.95^6 \,.\, 0.05^2 \approx 0.05$$

Exemple 4.2.2.2 Les statisticiens ont trouvé que la probabilité de la naissance d'un garçon est 51% et d'une fille - 49%. Trouver le nombre le plus probable des garçons lors de 4723 naissances.

Solution :
On utilise la formule du nombre le plus probable avec $p = 0.51$, $q = 0.49$ et $n = 4723$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&n\,.\,p - q \leq m \leq n\,.\,p + p \\
&4723\,.\,0,51 - 0,49 \leq m \leq 4723\,.\,0,51 + 0,51 \\
&2408,24 \leq m \leq 2409,24
\end{aligned}$$

Le nombre le plus probable des garçons nés est $m = 2409$.

Test sur le chapitre : Modèles d'urne

1. Combien de modes de tirage connaissez vous ? Enumérer les.

2. Décrivez le tirage avec remise

3. Décrivez le tirage sans remise

4. Décrivez le tirage simultané. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage

   a. sans remise **b.** avec remise

5. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n objets parmi n objets avec remise.

6. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p objets parmi n objets avec remise.

7. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p éléments parmi n sans remise.

8. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n éléments parmi n sans remise.

9. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirage simultané de p éléments parmi n.

Chapitre 5

Variables aléatoires

5.1 Introduction

L'événement aléatoire est une caractéristique qualitative de l'expérience aléatoire. Souvent il est utile de représenter le résultat d'une expérience aléatoire par une caractéristique quantitative, c.-a-d. par une valeur - une variable réelle ou complexe. Comme l'événement aléatoire, la valeur de la variable est aussi inconnue en avance. Elle peut différer en conséquence des différentes issues lors de la répétition de l'expérience. [12, 14] La notion mathématique qui représente efficacement d'une façon quantitative une expérience aléatoire concrète est celle de **variable aléatoire** - variable, dont les valeurs observées sont régies par le hasard. Ainsi la somme des deux dés, le pourcentage de réponses "oui" à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants dans un couple sont des exemples de variables aléatoires.

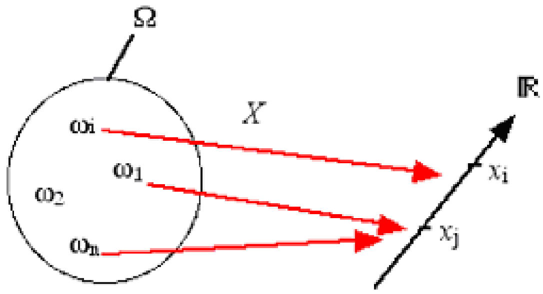
Remarque. On se limitera ici au cas des variables aléatoires **réelles**.

Définition 35 Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ l'espace probabilisé d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité P, lié à une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire réelle** (notée dans la suite v.a.) sur cet espace, toute application X de son ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, tel que :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longrightarrow x, \quad \text{avec } x = X(\omega),$$

c.-à-d. une application qui à chaque élément de Ω (à chaque résultat d'une expérience aléatoire) associe une donnée numérique réelle.
$X(\omega)$ Ω.

On dit que x est la valeur prise par la v.a. X lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est ω.



A chaque événement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X. Comme l'indique le graphe, il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire X que d'événements élémentaires. La valeur x correspond à la réalisation de la variable X pour l'événement élémentaire ω.

Exemple 5.1.1 **Sexe par âge croissant des enfants**. On considère le sexe par âge croissant des enfants d'une famille avec 2 enfants. L'espace fondamental est constitué des événements élémentaires suivant : sans choix, ordonné, avec répétition $\Longrightarrow |\Omega| = \bar{A}_2^2 = 2^2 = 4$

$$\Omega = \{GG,\ GF,\ FG,\ FF\}.$$

Notons la variable aléatoire X = "nombre de filles dans la famille". Le système complet d'événements est $\mathscr{T} = \{GG\}, \{GF, FG\}, \{FF\}$. Les valeurs possibles prise par X sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. L'ensemble image V est un ensemble discret, fini.

Notations. On désigne généralement par X (ou Y, ou Z,...) une variable aléatoire et par x (ou y, ou z,...) une valeur déterminée de celle-ci.

5.2 Variable aléatoire discrète

Supposons que l'ensemble fondamental Ω est fini ou dénombrable. Dans ces conditions X ne prend que des valeurs isolées et distinctes.

> **Définition 36** Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné).

L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un **dénombrement** ou d'une **numération** sont de type discrètes.
La variable aléatoire discrète X = "nombre de filles dans la famille" de l'exemple 5.1.1 prend des valeurs discontinues dans un intervalle borné, alors c'est une variable aléatoire discrète.

Exemple 5.2.1 On jette une pièce de monnaie. On définit la variable aléatoire X par le nombre de jets successifs nécessaires pour obtenir le côté pile pour la première fois :

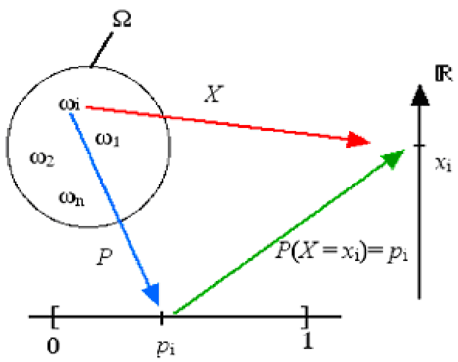
L'ensemble $V = \{x\}$ des valeurs possibles est l'ensemble des entiers positifs :

$$V = \{x\} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

C'est un ensemble infini dénombrable, un intervalle non borné. La variable aléatoire X = "le nombre de jets successifs nécessaires pour obtenir le côté pile pour la première fois" est une variable aléatoire discrète.

5.2.1 Loi ou distribution de probabilité discrète

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle la **loi de probabilité (ou distribution de probabilité)** de la variable aléatoire.



Si nous notons V l'ensemble des valeurs prises par X, la v.a. X est définie par :

$$X : \Omega \longrightarrow V, \quad \omega \longrightarrow x.$$

La loi de probabilité associe à chacune des valeurs possibles de la variable discrète X la probabilité de l'événement correspondant. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités p_i des événements $\{X = x_i\}$ et x_i parcourant l'univers image $V = X(\Omega)$.

Définition 37 On appelle **loi ou distribution de probabilité** de la v.a. discrète X la fonction définie par l'ensemble des couples $\{(x, p_x) : x \in V\}$:

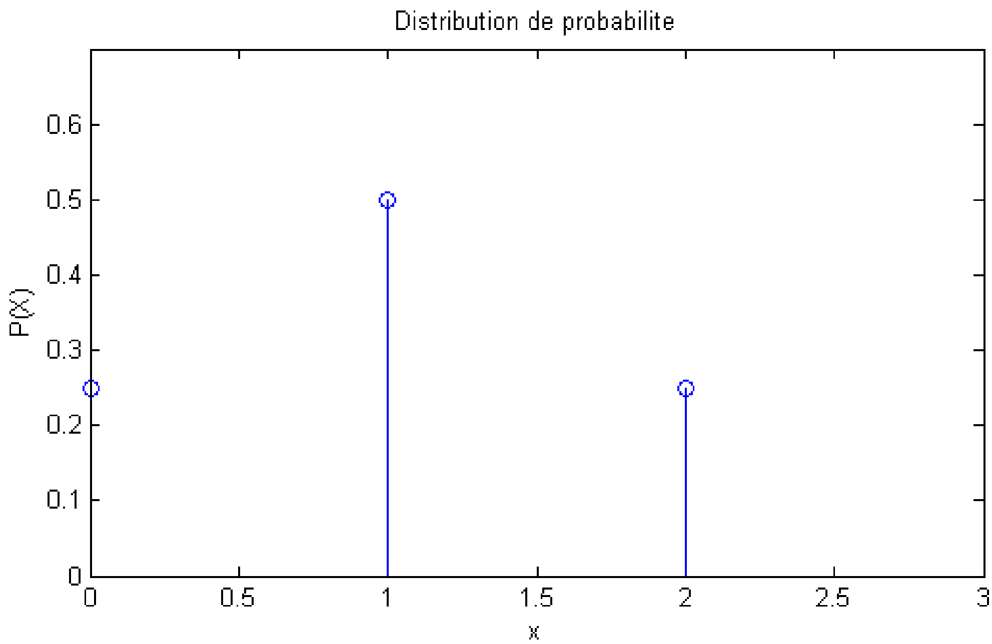
$$p(x) = p_x = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \neq V \end{cases}$$

Cette loi peut être représentée par un diagramme en bâtons.

Exemple 5.1.1 Sexe par âge croissant des enfants d'une famille - suite.
Le cardinal (le nombre des éléments de l'ensemble fondamental) est $|\Omega| = \bar{A}_2^2 = 2^2 = 4$. Si l'on fait l'hypothèse que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille (1/2), alors **la distribution de probabilité** ou **loi de probabilité du nombre de filles** dans une fratrie de deux enfants est :

Ensemble des événements possibles Ω à la variable X	G et G	F et G ou G et F	F et F
Valeurs de la variable aléatoire X	0	1	2
Probabilités associées $P(X = x_i)$ ou p_i	1/4	1/2	1/4

La représentation graphique est :



Si $P(F) = P(G) = 1/2$, alors

$$P[(F \cap G) \cup (G \cap F)] = P(F \cap G) + P(G \cap F) \quad \textbf{Propriétés d'additivité}$$
$$\text{avec } (F \cap G) \cap (G \cap F) = \emptyset \text{ événements incompatibles}$$
$$P(F \cap G) = P(F)P(G) \quad \textbf{Propriété d'indépendance}$$
$$\text{d'où } P[(F \cap G) \cup (G \cap F)] = P(X = 1) = (1/2 \times 1/2) + (1/2 \times 1/2) = 1/2.$$

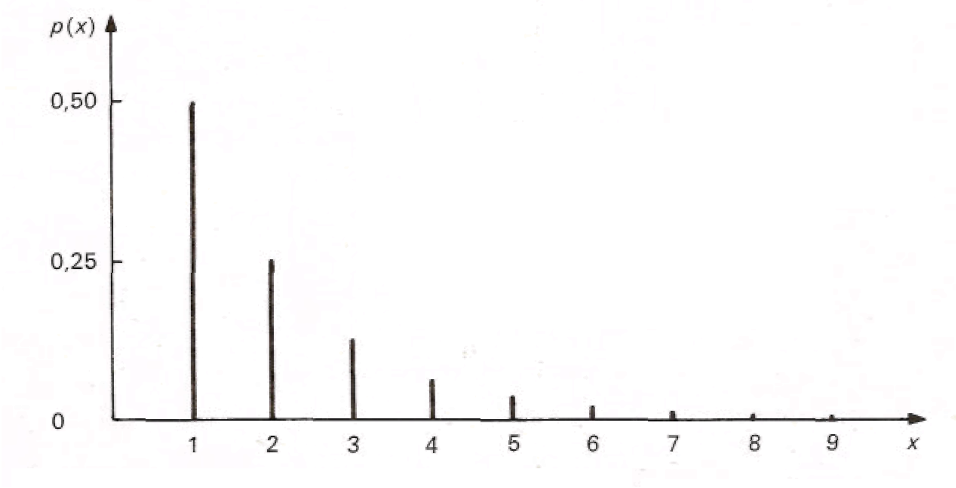
Exemple 5.2.1 Nombre de jets successifs nécessaires pour obtenir le côté pile pour la première fois - suite. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{P, (F, P), (F, F, P), \ldots\}$. L'ensemble image $\{x\}$ des valeurs possibles est l'ensemble des entiers positifs : $\{x\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Pour que x coups soient nécessaires, il faut obtenir le côté face aux $(x - 1)$ premiers coups et le côté pile au $x-$ème, d'où :

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^x}.$$

On obtient la loi de probabilité :

Variable aléatoire X	1	2	3	...	x	...
Probabilité $P(X = x)$	1/2	1/4	1/8	...	$1/2^x$	...

La représentation graphique de cette loi fait l'objet de la figure - diagramme en bâtons



Famille de distributions de probabilité

Si les probabilités p_x associés aux valeurs x d'une v.a. X dépendent d'un paramètre θ, ce que l'on note : $P(X = x) = p_x(\theta)$, avec $x \in V$, on dit que l'on a une famille de distributions de probabilité.

5.2.2 Fonction de répartition

Cette fonction associe à chaque valeur x de la variable aléatoire X la probabilité de ne pas excéder cette valeur. En d'autres termes :

Définition 38 La fonction qui associe à une valeur réelle quelconque x la probabilité pour que la v.a. X prenne une valeur *strictement inférieure*[a] à x est appelée **fonction de répartition** et est notée : $F(x) = P(X < x)$.

[a]La définition anglo-saxonne est du type *inférieur* ***ou égal***, ce qui risque de troubler le lecteur déjà familier des ouvrages écrits en anglais ou logiciels non "francisés" ; l'AFNOR préconise le maintien de l'usage français dans sa norme NF X 06-002 de novembre 1971, in *Statistique*, tome 1 (Vocabulaire, estimation et tests statistiques), recueil AFNOR, 6^0 édition, 1993.

Les valeurs de la fonction $F(X)$ sont des sommes cumulées des valeurs de la fonction $p(x)$. Si $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, la fonction de répartition de la distribution de probabilité définie par l'ensemble des couples $\{(x_i, p_i), i = \overline{1, n}\}$ est définie par :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_i & x_i < x \leq x_{i+1} \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n & x > x_n \end{cases}$$

L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.2.2.1 Soit la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

X	0	1	2
P	0.6	0.3	0.1

Définir la fonction de répartition $F(x)$.

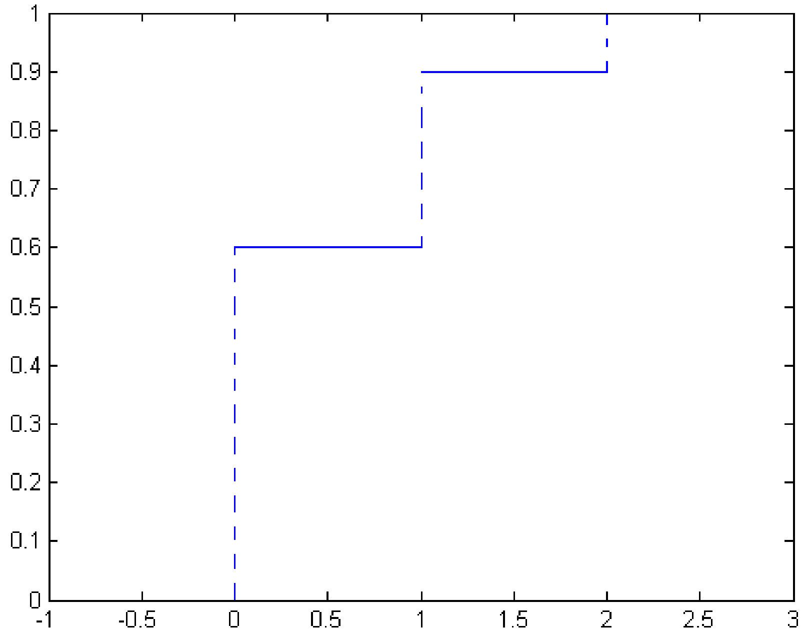
Solution :

1. Soit $x \leq 0$. Alors : $F(x) = P(X < x) = 0$.
2. Soit $0 < x \leq 1$. Alors : $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0.6$.
3. Soit $1 < x \leq 2$. Alors : $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.9$.
4. Soit $x > 2$. Alors : $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.

On obtient finalement :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.6, & 0 < x \leq 1 \\ 0.9, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Le graphe de la fonction $F(x)$ est



La représentation graphique de la fonction de répartition est la **courbe cumulative (courbe de répartition)**. Dans le cas d'une variable discrète, on l'appelle encore **courbe en escalier** à cause de sa forme : elle présente des marches (ou sauts) aux points d'abscisse x_i correspondant aux valeurs possibles de la variable.

Propriétés de la fonction de répartition

Soit $F(x) = P(X < x)$ la fonction de répartition d'une la variable aléatoire discrète X, alors :
p1. $\forall x \in \mathbb{R}\ 0 \leq F(x) \leq 1$
Résulte de la définition d'une probabilité
p2. $F(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
si $a \leq b$, alors $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ donc $P(X < a) \leq P(X < b)$
p3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
Résulte de la définition d'une probabilité
p4. si $a \leq b$ $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.
$\{X < b\} = \{a \leq X < b\} \cup \{X < a\}$ ainsi $F(b) = P(a \leq X < b) + F(a)$.
La fonction de répartition garde la même valeur $F(x_i)$ sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}[$. Au point d'abscisse x_i elle fait un saut égal à la probabilité attachée à la valeur de x_i.
On calcule aisément la fonction de répartition à partir des probabilités attachées aux valeurs possibles de la variable discrète :

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i).$$

Inversement, la fonction de répartition permet de reconstituer facilement la distribution de probabilité :

$$P(X = x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

II est donc indifférent de se donner l'une ou l'autre.

Exemple 5.2.2.2 Soit la fonction de répartition de la variable aléatoire x :

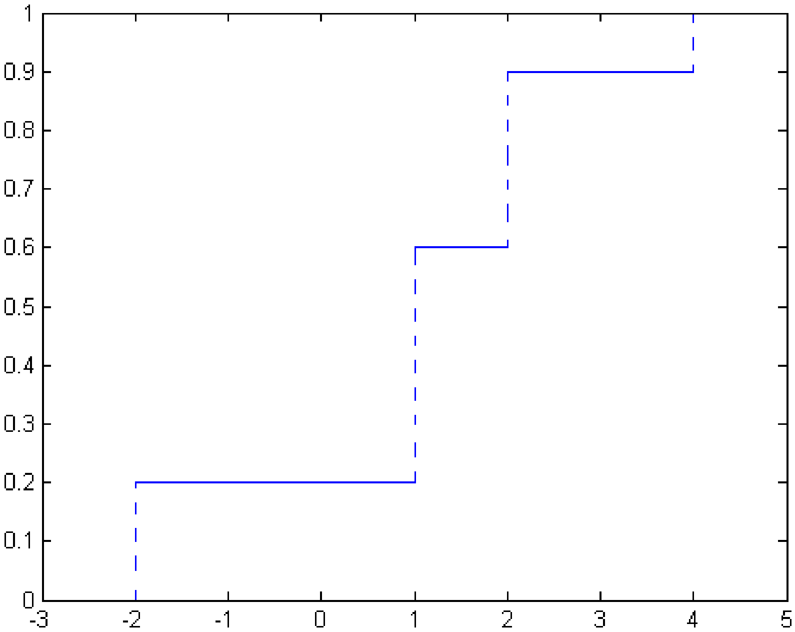
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0.2, & -2 < x \leq 1 \\ 0.6, & 1 < x \leq 2 \\ 0.9, & 2 < x \leq 4 \\ 1. & x > 4 \end{cases}$$

Définir la loi de probabilité de la variable X.

Solution :

On dessine le graphe de la fonction $F(x)$ Figure 5.1 : Les sauts de la fonction $F(x)$ sont dans les points $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$, et $x = 4$. Les marches sont respectivement $0.2, 0.4, 0.3$ et 0.1, qui représentent la probabilité des valeurs correspondantes de la variable aléatoire.
La loi de probabilité de la variable aléatoire est :

FIGURE 5.1 : Fonction de répartition

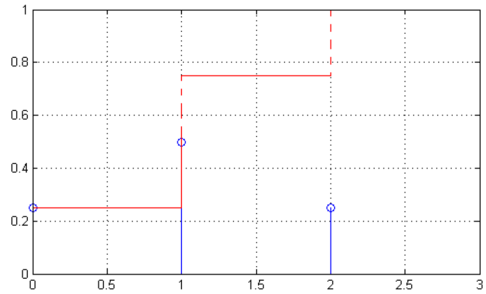


X	-2	1	2	4
P	0.2	0.4	0.3	0.1

Reprenons les deux exemples précédents : 5.1.1 **Sexe par âge.** et 5.2.1. **Lance d'une monnaie.**
Pour l'exemple 5.1.1 La densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire définie comme le nombre de filles dans une famille de deux enfants, est la suivante :

Nombre de filles	0	1	2	
$P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4	
$F_X = P(X < x)$	0	1/4	3/4	1

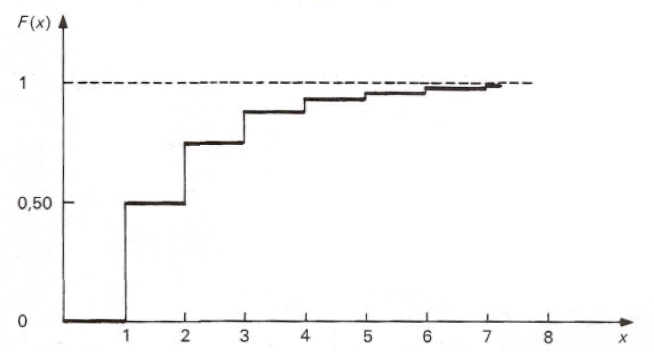
La représentation graphique est :



Pour l'exemple 5.2.1 La fonction de répartition de la variable aléatoire définie comme le nombre de jets d'une pièce de monnaie nécessaires pour obtenir le côté pile pour la première fois, est la suivante :

Variable aléatoire X	1	2	3	4	...	x		...
Probabilité $P(X = x)$	1/2	1/4	1/8	1/16	...	$1/2^x$		...
Fonction de répartition $F(x)$	0	1/2	3/4	7/8	...		$(2^x - 1)/2^x$	...

Sa représentation graphique est la courbe en escalier



5.2.3 Calcul de la probabilité que X appartienne à un intervalle réel à l'aide de la fonction de répartition

Exemple 5.2.2 **Un vendeur de téléviseurs** présente la synthèse du nombre d'articles vendus chaque jour au cours des 100 derniers jours de vente.

Nombre de T.V. vendus chaque jour	0	1	2	3	4	5	6	Total
Nombre de jours de vente	2	8	20	25	30	12	3	= 100

Soit X la variable aléatoire donnant "le nombre de T.V. vendus au cours d'une journée". Pour la fonction de distribution de probabilité et la fonction de répartition on a :

Valeur de $X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	
$P(X = x_i)$	0.02	0.08	0.20	0.25	0.30	0.12	0.03	
$F(x_i) = P(X < x_i)$	0	0.02	0.10	0.30	0.55	0.85	0.97	1

- Probabilité "vendre moins de 4 T.V. dans la journée" $= P(X < 4) = F(4) = 0.55$.
- Probabilité "vendre au plus 4 T.V. dans la journée" $= P(X \leq 4)$

$$P(X \leq 4) = P(X < 5) = F(5) = 0.85.$$

- Probabilité "vendre au moins 2 T.V. dans la journée" $= P(X \geq 2)$ Nous pouvons déterminer $P(X \geq 2)$ de 2 façons :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= 0.20 + 0.25 + 0.30 + 0.12 + 0.03 = 0.90 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.10 = 0.90$$

- Probabilité “vendre plus de 2 T.V. dans la journée” $= P(X > 2)$

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= 0.25 + 0.30 + 0.12 + 0.03 = 0.70 \end{aligned}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.30 = 0.70$$

- Probabilité “vendre plus de 2 TV mais au plus 5 TV dans la journée”

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = F(6) - F(3) \\ &= 0.97 - 0.30 = 0.67 \end{aligned}$$

- Probabilité “vendre plus de 2 TV mais moins de 5 TV dans la journée”

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= P(X < 5) - P(X \leq 2) = F(5) - F(3) \\ &= 0.85 - 0.30 = 0.55 \end{aligned}$$

5.3 Paramètres descriptifs d’une distribution discrète

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeur centrale, de dispersion et de forme de distribution.

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est définie par :

$$p(x) = p_x = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \neq V \end{cases}$$

5.3.1 Paramètres de position

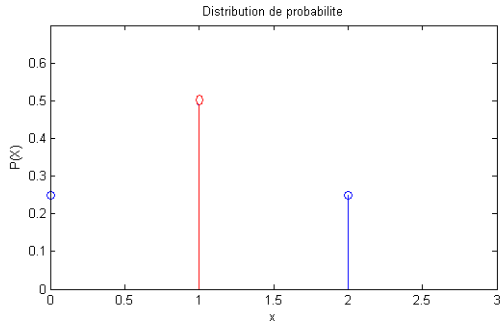
- **Mode x_m**

Définition 39 Le **mode** x_m de la variable aléatoire X, ou de la distribution de X est la valeur x_m, pour laquelle $P(X = x)$ présente un maximum.
C’est donc la valeur de X la plus probable.

Les distributions discrètes classiques présentent en général un seul mode (parfois deux modes successifs équiprobables) et sont dites unimodale, par opposition aux distributions à plusieurs ”bosses” dites plurimodales.
Dans l’exemple 5.1.1 **Sexe par âge.**, le mode de X est la valeur 1 ; dans l’exemple 5.2.1. **Lance d’une monnaie.**, le mode de X est la valeur 0.

Nombre de filles	0	1	2	
$P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4	

La représentation graphique est :



• **Espérance mathématique de X ou "moyenne probabiliste"** ou **moyenne** On fait la moyenne des valeurs x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ en les pondérant par leur probabilité d'apparition $p_i = p(X = x_i)$:

Définition 40 Si X est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité $(x_i, p_i), i = \overline{1, n}$ définit sur un nombre fini n d'événements élémentaires alors on appelle **espérance mathématique** de X, et on note μ_X ou $E(X)$, le nombre réel défini par :

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

$$/\mu_X = SUMPRODUCT(x_1 : x_n; p_1 : p_n)/$$

Remarque : L'espérance mathématique est une caractéristique de position. Elle est constante autour de laquelle les valeurs de la v.a. se groupent. Elle est également notée $\mu(X)$, μ_X ou encore μ si aucune confusion n'est à craindre.
Si on répète l'expérience N fois et N est assez grand nombre, et $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sont les valeurs obtenues pour X lors de chaque expérience, alors la moyenne $(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$ sera proche de l'espérance mathématique $E(X)$.

Exemple 5.1.1. Sexe par âge - suite. Si l'on reprend l'exemple d'une fratrie de deux enfants, l'espérance de la variable aléatoire "nombre de filles" est :

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 * 1/4 + 1 * 1/2 + 2 * 1/4 = 1, \text{ d'où } E(X) = 1$$

Si l'on observe un nombre suffisant de fratries de 2 enfants, on attend en moyenne une fille par fratrie.

Exemple 5.2.2. Un vendeur de téléviseurs - suite. On a :

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0.02	0.08	0.20	0.25	0.30	0.12	0.03

$$E(X) = (0 \times 0.02) + (1 \times 0.08) + (2 \times 0.2) + (3 \times 0.25)$$
$$+ (4 \times 0.30) + (5 \times 0.12) + (6 \times 0.03) = 3.21$$

Bien sûr, le vendeur ne vend pas 3.21 TV, mais cela veut dire que sur une longue période, il peut considéré que la vente quotidienne est de 3.21 TV.
Si le vendeur réalise un profit de 500 € par TV vendu, on peut déterminer le profit qu'il peut espérer réaliser quotidiennement sur longue période.
On a que $E(X) = 3.21$.
Le profit quotidien réalisé grâce à la vente de TV est une variable aléatoire $S = 500X$.

$$E(S) = E(500X) = 500E(X) = 500 \times 3.21 = 1605 \text{ €}.$$

- **Propriétés de l'espérance mathématique.**

Si a et b sont des nombres réels (des constantes) et X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

pe1 $\mathbf{E(a) = a}$

l'espérance mathématique d'une constante est la constante elle - même.
Comme la constante obtient une valeur unique de probabilité $p = 1$,
$E(a) = a \,.\, 1 = a$.

pe2 $\mathbf{E(aX) = aE(X)}$

L'espérance mathématique du produit d'une constante a et une v.a. X.
est le produit de a et l'espérance mathématique de X
Démonstration. Comme aX a la distribution

aX	ax_1	ax_2	$\dots$	ax_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

L'espérance mathématique est :
$E(aX) = ax_1p_1 + ax_2p_2 + \ldots + ax_np_n = a(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots x_np_n) = aE(X)$.

pe3 $\mathbf{E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)}$

L'espérance mathématique de la somme/différence de deux v.a. est
la somme/différence des espérances mathématiques des deux v.a.

$$E(X \pm Y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i + \sum_{i=1}^{n} y_ip_i = E(X) + E(Y)$$

pe4 $\mathbf{E(aX \pm b) = aE(X) \pm b}$

pe5 $\mathbf{E(XY) = E(X)E(Y)}$, si X et Y sont indépendantes

Démonstration : $E(X \,.\, Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jP_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jP_iP'_j =$
$\sum_{i=1}^{m} x_iP_i \sum_{j=1}^{n} y_jP'_j = E(X) \,.\, E(Y)$.

Exemple 5.3.1.1 Deux v.a. indépendantes ont les distributions de probabilités

X	1	2
P	0.4	0.6

Y	0	1	2
P'	0.2	0.3	0.5

Trouver $E(2X+3Y)$.

Solution :

On utilise les propriétés pe2 et pe3 :

$$E(2X+3Y) = E(2X) + E(3Y) = 2E(X) + 3E(Y).$$

On a

$$E(X) = 1\,.\,0.4 + 2\,.\,0.6 = 1.6 \text{ et } E(Y) = 0\,.\,0.2 + 1\,.\,0.3 + 2\,.\,0.5 = 1.3.$$

On obtient

$$E(2X+3Y) = 2\,.\,1.6 + 3\,.\,1.3 = 3.2 + 3.9 = 7.1$$

- **Moments d'ordre** k

Définition 41 On définit les **moments d'ordre** k d'une variable aléatoire X comme $m_k = E(X^k)$ c'est à dire la moyenne $\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$ des k^e puissances des valeurs de X

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

$$/m_k = SUMPRODUCT(x_1 : x_n; x_1 : x_n; \ldots; p_1 : p_n)/$$

La moyenne $E(X)$ de X est ainsi le moment d'ordre 1 de X :

$$m_1 = E(X).$$

L'éspérance mathématique ne caractérise pas d'une façon complète une v.a. Par exemple les v.a. ci-dessous sont d'espérances mathématiques identiques, mais de distributions différentes.

X	-50	50
P	0.5	0.5

$E(X) = 0$

Y	-0.05	0.05
P'	0.5	0.5

$E(Y) = 0.$

L'espérance mathématique ne donne pas d'information pour l'écart de la v.a. Il est nécessaire d'une estimation de la tendance de la v.a. a se disperser.

5.3.2 Paramètres de dispersion

- **Variance**.

Définition 42 On appelle variance de X, et on note $V(X)$, $Var(X)$ ou σ_X^2 la moyenne des carrés des écarts de la v.a. de sa moyenne :

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$$

Par définition une variance est toujours positive - c'est une somme de termes positifs (des carrés). Une valeur élevée de la variance signifie que les valeurs éloignées de l'espérance ont une forte probabilité. On dit que la variance est un paramètre de dispersion ; autrement dit, la variance est une estimation de la tendance de la variable aléatoire à s'écarter de la moyenne, à se disperser. Une valeur nulle de la variance signifie qu'il n'existe qu'une seule valeur observable de valeur égale à l'espérance (dispersion minimum).

Exemple 5.3.1 Soient les variables aléatoires :
X prenant les valeurs -2, -1, 0, +1, +2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$
Y, prenant les valeurs -2, -1, 0, +1, +2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$
Z, prenant les valeurs -2, -1, 0, +1, +2 avec les probabilités respectives $\frac{4}{10}$, $\frac{1}{10}$, 0, $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{10}$
Pour les trois variables, la dispersion des valeurs est la même, mais la probabilité d'une grande dispersion est élevée pour Z et faible pour X. Leurs variances sont :

$$Var(X) = 0.6 \quad Var(Y) = 2.0 \quad Var(Z) = 3.4$$

ce qui reflète bien les différents types de dispersion (la variable Z à forte dispersion a une variance nettement plus élevée que la variable X à faible dispersion)

Un défaut de la variance est de ne pas mesurer l'écart dans les mêmes unités que la variable : si les x_i sont des cm la variance sera en cm^2. C'est pourquoi on introduit une autre estimation de l'écart qui est la racine carrée de la variance ou écart-type.

- **Ecart-type**

Définition 43 On appelle écart-type de X la racine carré de sa variance. On note σ_X.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}.$$

Un écart-type est donc un réel positif ; il s'agit d'un indice de dispersion qui présente l'avantage d'avoir la même unité que les observables.

Quelles que soient les situations, pour calculer un écart-type, il faudra toujours déterminer la variance puis sa racine.
L'écart-type indique dans quelle mesure les valeurs prises par la variable aléatoire ont tendance

à être plus ou moins dispersées autour de l'espérance mathématique.
En gestion, il nous renseignera sur le degré de risque lié à certaines décisions prises à partir des différentes valeurs de la variable. Plus l'écart-type sera élevé, plus le risque sera grand.

- **Le coefficient de variation**

La moyenne et l'écart-type s'exprimant dans la même unité, il convient de calculer le coefficient de variation. Le coefficient de variation exprime l'écart-type en pourcentage de la moyenne.

Définition 44 On définit **le coefficient de variation** - en général pour des variables positives seulement - comme le rapport de l'écart type à la moyenne :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%.$$

Le coefficient de variation est exprimé en pourcentage et mesure la dispersion relative d'une distribution. Le coefficient de variation donne homogénéité de la distribution

— Si $CV < 15\%$, la distribution est peu dispersée et peut être considéré comme homogène.

— Si $CV > 15\%$, on considère que la distribution est hétérogène, dispersée.

Le coefficient de variation permet de comparer les distributions homogènes, lorsqu'elles sont positives et d'en dégager la plus homogène.

- **Calcul de $Var(X)$:**

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = E((X - E(X))^2) \\
&= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\
&= E(X^2) - 2E[XE(X)] + E[E(X)^2] \quad \text{Propriété pe4 de l'espérance} \\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \text{ Propriété pe4 de l'espérance}
\end{aligned}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Ou bien : On peut écrire : $V(X) = \sum_i (x_i^2 - 2\mu_X x_i + \mu_X^2)p_i$.
D'où $V(X) = \sum_i (x_i^2 p_i) - 2\mu_X \sum_i (x_i p_i) + \mu_X^2 \sum_i p_i$.
Comme $\sum_i p_i = 1$ et $\sum_i p_i x_i = \mu_X$, donc $V(X) = \sum_i (x_i^2 p_i) - \mu_X^2$.
D'où la relation (théorème de Guldin) :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2.$$

Cette relation est très commode dans le calcul de la variance.

$$\begin{aligned}
/V(X) &= SUMPRODUCT(x_1 : x_n; x_1 : x_n; p_1 : p_n) \\
&\quad -SUMPRODUCT(x_n : x_n; p_1 : p_n)\hat{\ }2/
\end{aligned}$$

- **Propriétés de la variance.** Si a est un nombre réel (une constante) et X et Y sont variables aléatoires :

pv1. $Var(a) = 0$

pv2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$

pv3. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2E((X - E(X)(Y - E(Y))$

pv4. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y),$ si X et Y sont v.a. indépendantes.

Exemple 5.2.2. **Un vendeur de téléviseurs - suite.** Le vendeur peut estimer la dispersion des ventes quotidiennes et des profits quotidiens.
Calcul de l'écart-type des ventes quotidiennes :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	
p_i	0.02	0.08	0.20	0.25	0.30	0.12	0.03	$E(X) = 3.21$
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	
$p_i x_i^2$	0.00	0.08	0.80	2.25	4.80	3.00	1.08	$E(X^2) = 12.01$

$$\begin{aligned} Var(X) &= 12.01 - (3.21)^2 \\ Var(X) &= 1.7059 \\ \sigma(X) &= \sqrt{1.7059} = 1.3061 \end{aligned}$$

La dispersion des ventes quotidiennes autour de l'espérance mathématique est de 1.3061.
On peut ensuite déterminer la variance et l'écart-type du profit quotidien $S = 500X$.

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var(500X) = 500^2 Var(X) = 250000 \times 1.7059 = 426475 \\ \Longrightarrow & \quad \sigma(Z) = \sqrt{426475} = 653.05 \end{aligned}$$

Le vendeur peut donc espérer réaliser un profit quotidien moyen de 1 605 € avec une dispersion du profit quotidien de 653.05 € autour de 1 605 €.

- **Moments centraux d'ordre k**

Définition 45 On appelle μ_k **moment central d'ordre** k d'une variable aléatoire X la moyenne $\sum p_i (x_i - E(X))^k$ des k^e puissances de leurs valeurs centrées $x_i - E(X)$:

$$\mu_k = E(X - E(X))^k.$$

Le premier moment central est toujours nul. La variance de X est le moment central d'ordre 2 de X.

5.3.3 Couples de variables aléatoires

On considère deux ou plusieurs variables aléatoires X et Y etc. simultanément, définies sur le même univers Ω et dont la loi conjointe $P(X,Y) = P((X = x)$ et $(Y = y))$ est connue. Il faut définir un indicateur de leur " liaison " qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (espérance mathématique et variance).

Définition 46 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, on appelle **covariance** de ces deux variables, le réel :

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et **coefficient de corrélation**, le réel :

$$R(X,Y)\frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Il résulte de cette définition et de propriété pe5 de la moyenne, le théorème suivant :

Théorème 8 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$.

Les propriétés de la covariance sont les suivantes :

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, alors :

pc1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \quad V(aX+bY) = a^2V(X) + 2ab\,cov(X,Y) + b^2V(Y)$

pc2. $(cov(X,Y))^2 \leq V(X)\,V(Y) \quad |cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$

pc3. $-1 \leq cov(X,Y) \leq 1$

5.3.4 Opérations sur les variables aléatoires

Il arrive souvent que l'on effectue des transformations sur les variables aléatoires par commodité de calcul et il est important de savoir comment se comportent les paramètres associés à cette variable.

Le tableau ci-dessous résume quelques transformations possibles avec a et $b \in \mathbb{R}$.

Translation de l'origine seule $X \to X+b$	Changement d'unités seul $X \to aX$	Cas général $X \to aX+b$
$E(X+b) = E(X)+b$ $V(X+b) = V(X)$	$E(aX) = aE(X)$ $V(aX) = a^2V(X)$	$E(aX+b) = aE(X)+b$ $V(aX+b) = a^2V(X)$

Il existe d'autres transformations de variables aléatoires qui conduisent à des valeurs de paramètres particulières.

- ## Variable centrée

Définition 47 Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$. Si elle est d'espérance mathématique nulle.

Exemple : La variable $Y = X - E(X)$ est une **variable aléatoire centrée** car $E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.

- **Variable réduite**

Définition 48 Une variable aléatoire X est dite **réduite** si $V(X) = 1$.

Exemple. La variable $Y = \frac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est une **variable aléatoire réduite** car $V(Y) = V(X/\sigma(X)) = 1/(\sigma(X))^2 V(X) = V(X)/V(X) = 1$.

- **Variable aléatoire centrée réduite**

Définition 49 A toute variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$ on peut associer la variable aléatoire $\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ dite variable aléatoire **centrée réduite** et dont l'emploi est indispensable pour utiliser la plupart des tables notamment les **tables de la loi normale réduite**.

5.4 Algèbre des variables aléatoires

Comme d'après la définition la variable aléatoire est une fonction de l'ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, on peut effectuer des opérations arithmétiques avec les variable aléatoires.
Par exemple, si X est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_m

et k est une constante, alors $k \,.\, X$ est une variable aléatoire nouvelle de loi de probabilité :

kX	kx_1	kx_2	$\dots$	kx_m
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Soit la variable aléatoire Y, dont la loi de probabilité est

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$P(Y)$	p'_1	p'_2	$\dots$	p'_n

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, si pour chaque paire de valeurs possibles x_i et y_j l'égalité

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \,.\, P(Y = y_j) = p_i \,.\, p'_j$$

est satisfaite.

Définition 50 On appelle somme de deux v.a. X et Y une nouvelle v.a., dont les valeurs sont $x_i + y_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ et les probabilités correspondantes sont $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.
Si X et Y sont indépendantes, on a $P_{ij} = p_i \,.\, p'_j$.

La définition de la différence de deux v.a. indépendantes est analogique de celle de la somme : $X - Y$ est une v.a., dont des valeurs $x_i - y_j$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, n$ et probabilités $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = p_i \,.\, p'_j$.
Multiplication de deux v.a. $X \,.\, Y$ est une nouvelle v.a., dont les valeurs sont obtenues des produits $x_i y_j$ $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ et probabilités $P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = p_i \,.\, p'_j$.
Le carré d'une v.a. X est la v.a. X^2, dont les valeurs sont $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ et les mêmes probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On voit que $X \,.\, X \neq X^2$ et $X + X \neq 2X$.

5.4.1 Fonction caractéristique et fonction génératrice

Définition 51 Étant donnée une variable aléatoire de loi $\{x_i, p_i\}$, on appelle fonction caractéristique de X la fonction

$$\Phi_X(t) = \sum_i p_i e^{itx_i}.$$

C'est simplement la transformée de Fourier de la loi.

Définition 52 La fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi $\{x_i, p_i\}$ est

$$G_X(z) = \sum_i p_i z^{x_i}.$$

Cette dernière est plutôt recommandée lorsque les x_i sont des nombres entiers ; dans ce cas c'est un polynôme, ou, si on fait tendre le nombre des x_i vers l'infini, une fonction analytique de z. On bénéficie alors de toute la richesse des propriétés mathématiques des polynômes ou des fonctions d'une variable complexe. Rien n'interdit dans le principe de la prendre en considération même lorsque les x_i sont non entiers, mais dans un tel cas elle est beaucoup moins commode et on lui préférera alors la fonction caractéristique. De toute façon, fonction caractéristique et fonction génératrice sont liées par la relation

$$\Phi_X(t) = G_X(e^{it}).$$

Pour une variable aléatoire X à valeurs entières, on obtient les probabilités de chaque valeur (c'est-à-dire la loi de la variable aléatoire X) en développant la fonction génératrice $G_X(z)$ en série entière, ou en série de Laurent s'il y a des valeurs négatives.
On peut aussi déduire directement de la fonction génératrice d'autres grandeurs liées à la variable aléatoire telles que la moyenne et la variance. Ainsi, la moyenne n'est autre que $G'_X(1)$

(la dérivée de $G_X(z)$ au point $z = 1$). En effet

$$G'_X(z) = \sum_i i p_n z^{i-1}$$

donc pour $z = 1$ cela donne

$$G'_X(1) = \sum_i i p_i = E(X).$$

La dérivée seconde fournira la variance :

$$G''_X(z) = \sum_i i(i-1) p_i z^{i-2}$$

ce qui pour $z = 1$ donne $G'_X(1) = \sum_i i(i-1)p_i = \sum_i i^2 p_i - \sum_i i p_i = E(X^2) - E(X)$.
Des expressions analogues pour la moyenne ou la variance peuvent être obtenues à partir des fonctions caractéristiques. Ces expressions seront utilisées lorsque la variable aléatoire n'est pas à valeurs entières.

Test sur le chapitre : Variable aléatoire discrète.

1. Qu'est-ce que la variable aléatoire ?

2. Donnez la définition de v.a. discrète

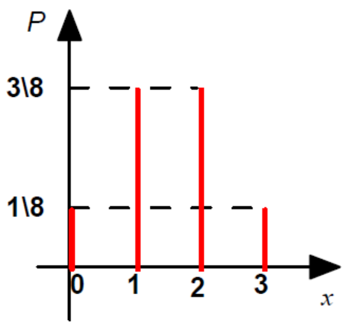
3. Décrivez la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète ?

4. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète peut être représenté graphiquement par un diagramme en ….

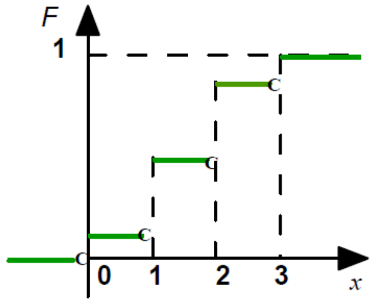
5. Décrivez la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète ?

6. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète se visualise par un diagramme en ….

7. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



8. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



9. Décrivez les paramètres d'une loi de probabilité discrète
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire discrète est centrée ?
11. Donnez la définition de la variable aléatoire discrète réduite.

Chapitre 6

Lois de probabilité discrètes particulières

La plupart des phénomènes statistiques peuvent être décrits par un petit nombre de modèles probabilistes ou lois de probabilité. Naturellement, lorsque cette représentation est possible, elle fournit une description beaucoup plus riche du phénomène que le simple calcul des caractéristiques de tendance centrale et de dispersion. Elle permet notamment de calculer la probabilité de certains événements et, par conséquent, de préciser dans une certaine mesure la représentation que l'on peut se faire de l'avenir.

Il convient donc de connaître les modèles probabilistes les plus courants de façon à pouvoir rechercher dans ce catalogue celui qui est susceptible de convenir à la description d'un phénomène aléatoire déterminé.

Dans tous les cas, le processus est le suivant :

- L'observation du phénomène fournit une distribution expérimentale ou empirique.

- L'analyse de cette distribution empirique — examen de la représentation graphique et calcul des caractéristiques de tendance centrale et de dispersion — donne une première idée de la nature du phénomène observé. Au vu de ces premières conclusions, on choisit parmi les différents types de lois de distribution théorique celui qui paraît convenir. Cela revient à choisir la *forme* du « moule » dans lequel on peut « couler » le phénomène. Il faut alors, au moyen de la série empirique, estimer les paramètres de cette loi. Cela revient à choisir le « moule » de la taille qui convient.

- La substitution de la loi théorique à la distribution empirique n'est évidemment valable que si les valeurs observées et les valeurs théoriques résultant du modèle sont assez proches les unes des autres : il faut tester que la description donnée du phénomène par la loi théorique est *acceptable*, autrement dit que les écarts observés entre les fréquences empiriques et les fréquences théoriques peuvent être raisonnablement attribués au hasard.

A. Lois usuelles finies

6.1 Distribution uniforme (discrète) $X \sim \mathcal{U}(n)$

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque l'ensemble des observations de la valeur aléatoire contient un nombre fini de valeurs réelles : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables. Une distribution uniforme ne présente, évidemment, pas de mode.
Exemple 1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard, et on note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Les valeurs x_i de la variable aléatoire X sont toutes équiprobables. Alors X suit une loi uniforme sur $\{1, 2 \ldots, n\}$ (ce que l'on note) $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Définition 53 Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ à la quelle est associée une variable aléatoire X dont l'ensemble des observables contient un nombre fini de valeurs réelles : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
La loi de probabilité de X est dite uniforme si elle est définie par

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

6.1.1 Paramètres descriptifs :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

6.1.2 Cas fréquent $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Un cas fréquent est celui où l'ensemble des observations est constitué des n premiers entiers $V = (1, 2, 3, \ldots, n)$.

Dans ce cas $p_k = P(X = k) = 1/n$ pour tout $k \in V$ et la fonction de distribution de probabilité est définie par l'ensemble des couples $(k, 1/n)$.

Fonction de répartition :

$F(x) = k/n$, $(k \leq x < k + 1)$

Paramètres :

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{i=1}^{n} iP(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)}{2}{}^{1}\\
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}{}^{2}\\
\sigma^2 = Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

Exemple 6.1.2.1 La distribution des chiffres obtenus au lancer de dé (si ce dernier est non pipé) suit une loi uniforme /le cas particulier - l'ensemble des observables constitué des n premiers entiers/ dont la loi de probabilité est la suivante :

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

avec pour espérance :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

et pour variance

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = 2.92.$$

Vérification

$$
\begin{aligned}
&E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5\\
&E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}\\
&V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \frac{7^2}{2^2} = \frac{2\times 91 - 3\times 49}{12} = \frac{182-147}{12}\\
&= \frac{35}{12} = 2.92.
\end{aligned}
$$

[2]La somme des n premiers nombres entiers est égale à $n(n+1)/2$

[2]La somme des carrée des n premiers nombres entiers est égale à $n(n+1)(2n+1)/6$ (voir https ://www.les-suites.fr/somme-des-n-premiers-carres.htm)

6.2 Distribution de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succès) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$.

Définition 54 On appelle **variable indicatrice** ou **variable de Bernoulli** de l'événement S la variable aléatoire X qui associe à S la valeur un et à $\bar{S}$ la valeur zéro :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$X(\Omega) = \{0, 1\}.$$

Définition 55 La **loi de probabilité** associée à la variable de Bernoulli X telle que : $\{(0, q), (1, p)\}$, c.à d. $P(X = 0) = q$, $P(X = 1) = p$, avec $p + q = 1$ est appelée **loi de Bernoulli** notée $\mathcal{B}[1, p]$

Notation : $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$

Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ q & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Paramètres descriptifs :

$$\mu = p; \quad \sigma^2 = pq.$$

Le mode est 1 si $p > \frac{1}{2}$, et 0 si $p < \frac{1}{2}$. Il n'y a pas de mode si $p = \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on obtient la loi uniforme sur $[0, 1]$ puisque alors $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Démonstration

$$\mu = E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i P(X = x_i) = 0\,.\,q + 1\,.\,p = p$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=0}^{1} P(X = x_i)(x_i - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{1} P(X = x_i)(x_i - p)^2 = (1 - p)(-p)^2 + p(1 - p)^2 = p(1 - p) = pq.$$

Exemples typiques : Le lancer d'une pièce de monnaie ; l'extraction d'une boule dans une urne ne contenant que deux types de boules ; la réponse à une question d'un vrai ou faux ;...

6.3 Distribution binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Définition 56 On considère un schéma de Bernoulli (répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes). On appelle v.a. Binomiale, la v.a. X qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.

C'est un modèle composé de n lois de Bernoulli indépendantes. La loi binomiale intervient chaque fois que l'on considère deux alternatives dont les probabilités restent constantes au cours d'une suite d'épreuves : garçon ou fille, mort ou survie, acceptation ou mise au rebut de pièces fabriquées en série, etc. Cette loi est l'une des distributions de probabilité les plus fréquemment rencontrées en statistique appliquée.

Modèle général de génération de la loi binômiale : le schéma de Bernoulli

Soit une suite finie de n expériences aléatoires $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_n$, obéit aux conditions suivantes :

- chaque expérience peut entraîner l'observation d'un événement E ou de son contraire $\bar{E}$;
- la probabilité de E, notée p, est la même pour chaque expérience ; ceci est alors également vraie pour la probabilité de $\bar{E}$, notée $q = 1 - p$;
- le résultat d'une expérience est indépendant des résultats des autres expériences.

On note E_k l'événement "E se réalise à la k-ème expérience" et A_k l'événement "E se réalise exactement k fois dans la suite d'expériences".
L'événement A_k peut se réaliser de plusieurs manières mutuellement incompatibles. La probabilité de A_k est donc la somme des probabilités de chacune de ces éventualités. L'une d'elles est, par exemple : $E_1 \cap \ldots \cap E_k \cap \overline{E_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{E_n}$; sa probabilité est $p^k q^{n-k}$, à cause de l'indépendance des événements. Toute autre éventualité réalisant A_k aura la même probabilité, obtenue par le produit de k termes égaux à p et de $n - k$ termes égaux à q.
Pour obtenir la probabilité de A_k, il suffit donc de dénombrer les éventualités qui réalisent A_k. Il est clair qu'il y en a autant que de manières de choisir, parmi les n expériences, celles qui réalisent E, c'est-à-dire C_n^k et on écrit $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
Ce schéma, dit de Bernoulli, s'applique par exemple, à une suite de jets d'une pièce de monnaie ($E =$ pile) ou un tirage avec remise, ou non exhaustif, de n boules dans une urne à deux catégories ($E =$ boule tirée est rouge).
Si on associe à une suite d'expérience de Bernoulli la variable aléatoire représentant le nombre d'événements E que l'on peut observer, l'événement A_k s'écrit "$X = k$" et on a : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Définition 57 On dit qu'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une loi binomiale si sa loi de probabilité est donnée par :

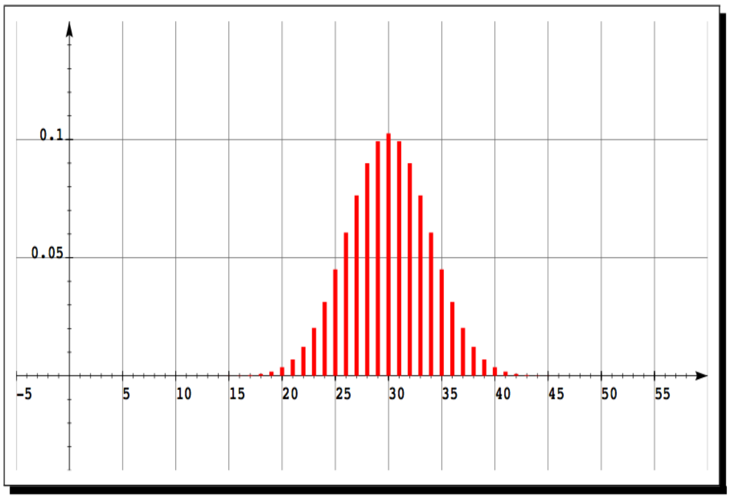
$$P(X = k) = P(\text{ "Obtenir } k \text{ succès" }) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, où n est entier donné et où p est un réel tel que $0 < p < 1$.

Notation : nous noterons : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ pour indiquer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple 6.3.1 On lance une pièce de monnaie 60 fois de suite. Si X est la variable aléatoire qui représente le nombre de "piles" que l'on peut obtenir en cette expérience aléatoire, X suit une loi $\mathcal{B}(60, \frac{1}{2})$. Quelle est la probabilité d'obtenir 25 pile ?
Analyse : $n = 60$, $k = 25$, $p = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k} = P(X = 25) = C_{60}^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{35} \\ &= \frac{60!}{25!\,35!} \frac{1}{2^{25}} \frac{1}{2^{35}} = 0,045029465 \\ &\quad /BINOMDIST(k; n; p; 0)/ \end{aligned}$$



loi binômiale $\mathcal{B}$ (60; 1/2)

Fonction de répartition

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i} & k < x \leq k+1 \\ 1 & x > n \end{cases}$$

$$/BINOMDIST(k; n; p; 1)/$$

Paramètres

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = npq.$$

Démonstration
L'espérance mathématique
La variable binomiale X, correspondant à n tirages, peut être considérée comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Son espérance mathématique est :

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i). \end{aligned}$$

En effet, en vertu des propriétés de l'espérance mathématique, l'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances mathématiques.

Or, l'espérance mathématique de la variable de Bernoulli X_i, définie pour chacun des n tirages, est :

$$E(X_i) = p.$$

Par suite :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np.$$

Or, d'après la définition de l'espérance mathématique $E(S) = \sum_i p_i x_i$ et comme $P(X) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, on obtient pour l'espérance mathématique de la distribution binomiale

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} = np. \end{aligned}$$

L'espérance mathématique (ou moyenne) de la distribution binomiale est égale à np.

Variance
La variance de la variable binomiale X est

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i). \end{aligned}$$

En effet, en vertu des propriétés de la variance, la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances.

La variance de la variable de Bernoulli X_i définie pour chacun des n tirages, est :

$$V(X_i) = pq.$$

Par suite :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq.$$

L'écart-type de la distribution binomiale est égal à $\sqrt{npq}$.

En résumé, la loi binomiale dépend des 2 paramètres :

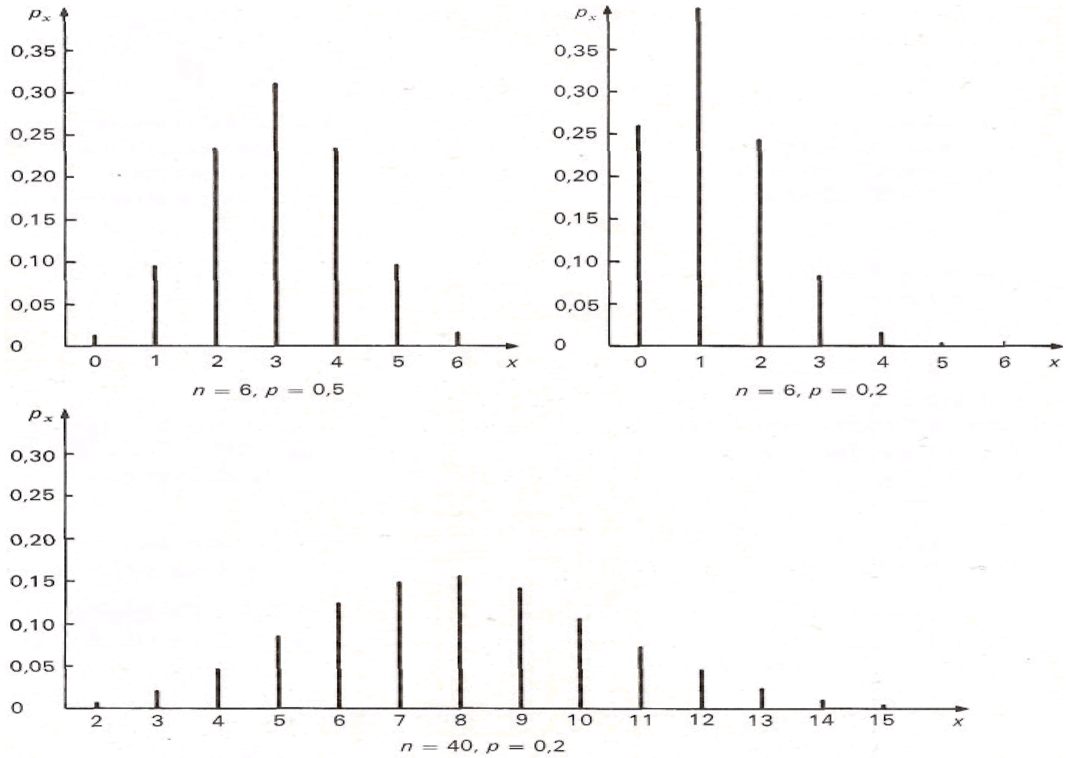
- n : nombre de tirages successifs ou d'épreuves indépendantes. Dans une enquête par sondage, c'est l'effectif de l'échantillon ;
- p : probabilité de réalisation de l'événement étudié lors de chacun des tirages ou épreuves indépendantes (proportion de boules blanches dans l'urne).

La probabilité que la variable binomiale X prenne la valeur x est :

$$P\{X = x\} = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

Forme

La distribution binomiale est **symétrique** quand $p = q = 0,5$. Sinon, elle est **dissymétrique,** la dissymétrie étant d'autant plus grande que p est plus différent de q. Toutefois, quand le nombre d'observations est grand, à condition que p ne soit pas trop voisin de 0 ou de 1, elle tend à devenir symétrique. Dans ce cas la distribution binomiale se rapproche de la distribution normale.



La distribution est de type unimodal et admet pour mode l'entier, en général unique, située dans l'intervalle $[np - q, np + p]$ ou exceptionnellement deux modes successifs, équiprobables, bornes de l'intervalle ci-dessus lorsque $np + p$ a une valeur entière.

Démonstration [12] : Le mode d'une distribution de probabilité est la valeur de la variable aléatoire pour laquelle la probabilité est la plus élevée : c'est la valeur la plus probable.

Par suite, le mode de la loi binômiale est l'entier x tel que :

$$P_{x-1} < P_x \quad \textit{et} \quad P_x > P_{x+1},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{P_x}{P_{x-1}} > 1 \tag{6.1}$$

et

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} < 1. \tag{6.2}$$

Calculons le rapport des probabilités relatives à deux valeurs consécutives de la variable binômiale :

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{C_n^{x+1}\, p^{x+1}\, q^{n-x-1}}{C_n^x\, p^x\, q^{n-x}} = \frac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}\,\frac{x!(n-x)!}{n!}\,\frac{p}{q} = \frac{n-x}{x+1}\,\frac{p}{q}.$$

Par conséquent, les inégalités (6.1) et (6.2) s'écrivent :

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{n-x}{x+1}\,\frac{p}{q} < 1 \tag{6.3}$$

$$\frac{P_x}{P_{x-1}} = \frac{n-x+1}{x}\,\frac{p}{q} > 1 \tag{6.4}$$

(en remplaçant dans l'inégalité précédente x par $x-1$).

De (6.3) :

$$\begin{aligned} (n-x)p &< (x+1)q, \\ np - xp &< x - xp + q, \qquad /q = 1-p/ \\ np - q &< x. \end{aligned}$$

De (6.4) :

$$\begin{aligned} (n-x+1)p &> xq, \\ np - xp + p &> x - xp, \\ np + p &> x. \end{aligned}$$

On obtient :

$$np - q < x < np + p.$$

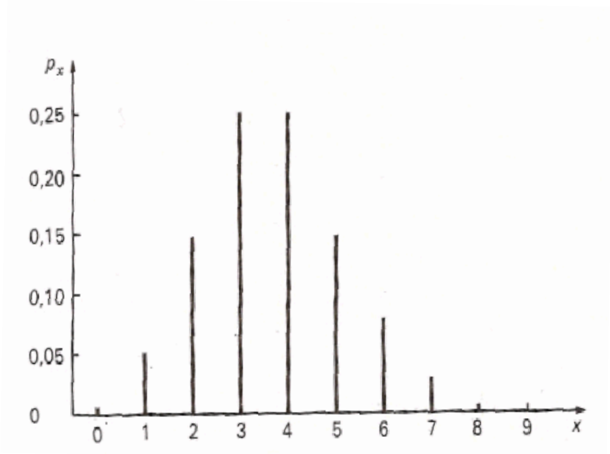
Si $np-q$ est entier :

$$\begin{aligned} &np - q = i, \\ &np + p = np - q + (p+q) = i + 1, \end{aligned}$$

$np+p$ est l'entier immédiatement supérieur. Il y a alors deux valeurs modales $np-q$ et $np+p$.

Exemple 6.3.2 Soit $X \sim \mathcal{B}(9, 0.4)$, donc $n = 9$, $p = 0,4$.
Il y a deux valeurs modales :

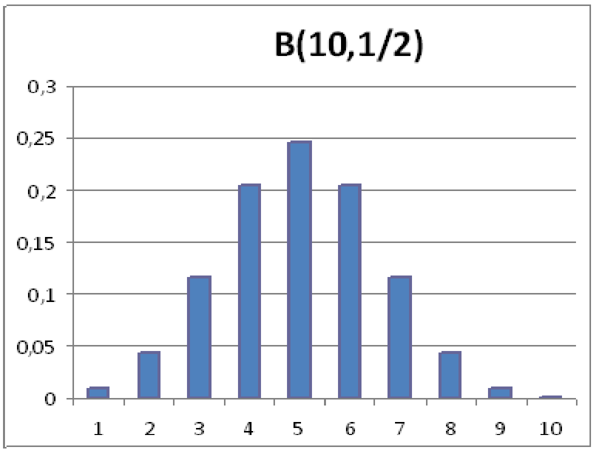
$$np - q = 3.6 - 0.6 = 3 \quad \text{et} \quad np + p = 3.6 + 0.4 = 4.$$

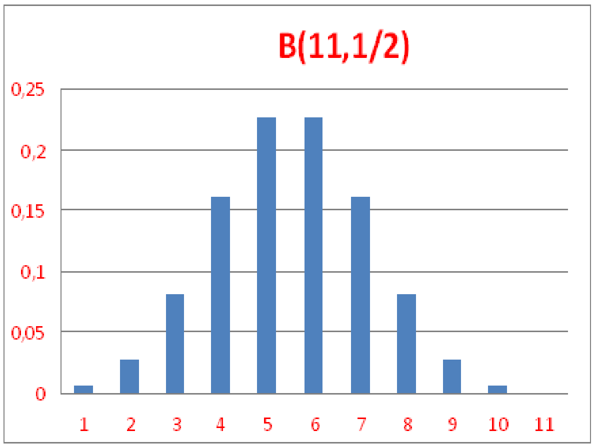


Formes de la distribution

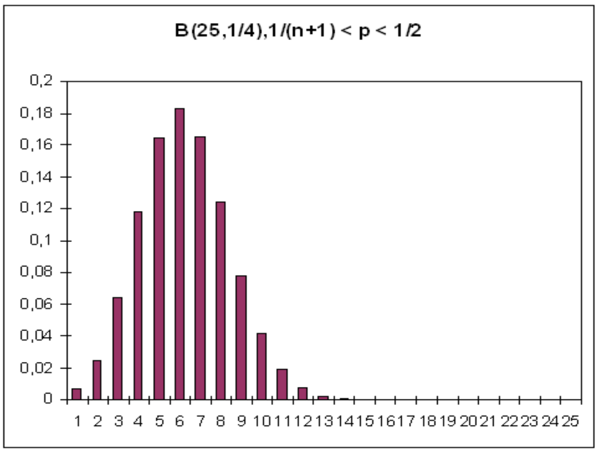
La forme d'une distribution binomiale se déduit aisément de l'étude du mode :

1. si $p = \frac{1}{2} = q$, forme en cloche symétrique.
   En effet $P(X = k) = C_n^k(\frac{1}{2})^n = P(X = n - k)$. Car $C_n^k = C_n^{n-k}$. Deux modes successifs équiprobables pour n impair.

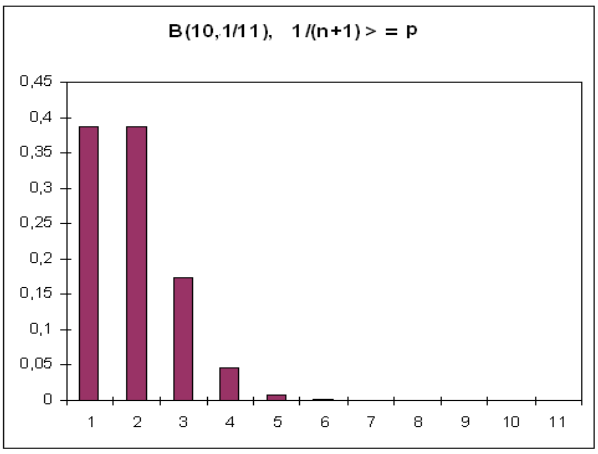




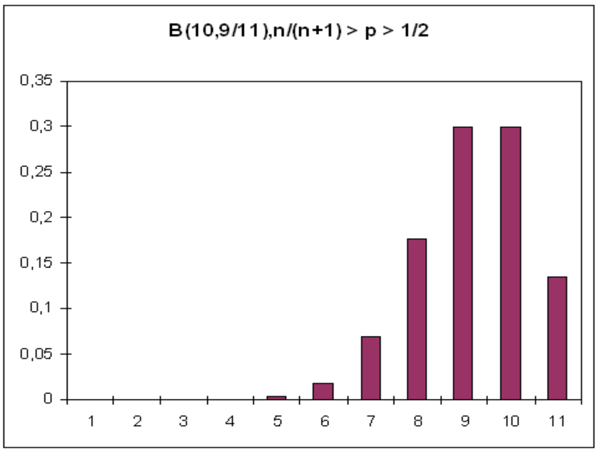
2. Si $\frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{2}$, forme en cloche dissymétrique, le mode étant déplacé vers la gauche. Éventuellement, deux modes successifs équiprobables.



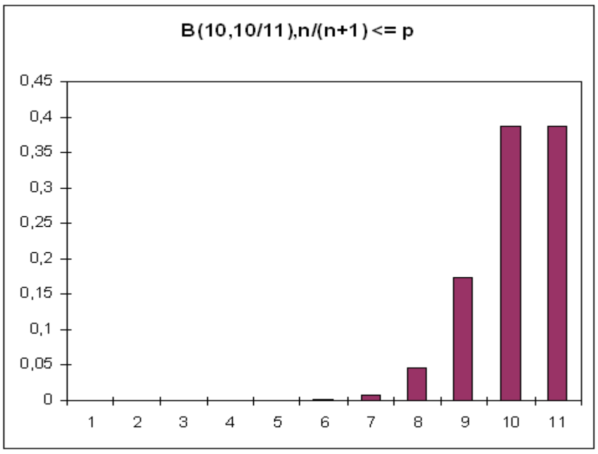
3. Si $p \leq \frac{1}{n+1}$, forme en L ; mode = 0, éventuellement deux modes 0 et 1.



4. Si $\frac{1}{2} < p < \frac{n}{n+1}$, forme en cloche dissymétrique, le mode étant déplacé vers la droite. Éventuellement, deux modes successifs équiprobables.

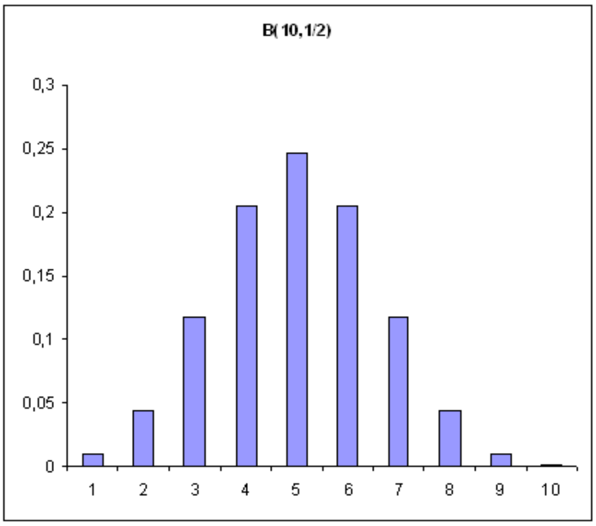


5. Si $p \geq \frac{n}{n+1}$, forme en J ; Éventuellement, deux modes en $n-1$ et n.

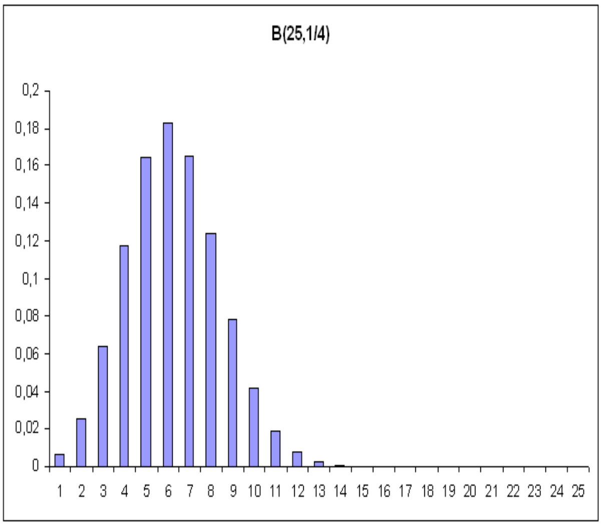


Exemple 6.3.3 Forme de la loi binomiale

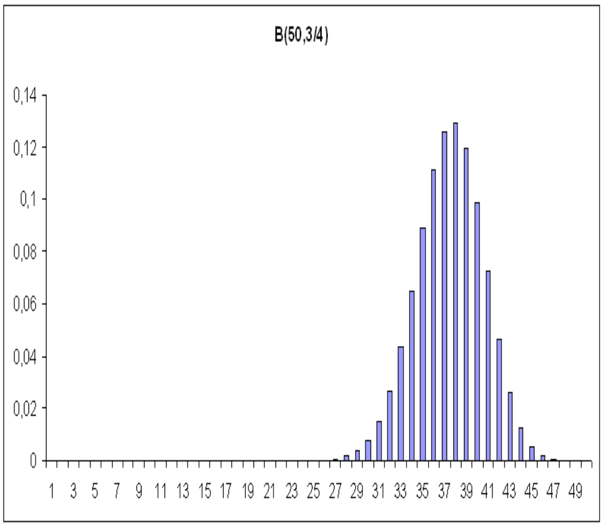
Si X suit une loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$, la distribution est en cloche symétrique par rapport au mode 5, valeur égale aussi à l'espérance de X.



Si Y suit une loi $\mathcal{B}(25, \frac{1}{4})$, la distribution est en cloche dissymétrique ; le mode 6 est plus proche de 0 que de 25.



Si X suit une loi $\mathcal{B}(50, \frac{3}{4})$, la distribution est en cloche dissymétrique ; le mode 38 est plus proche de 50 que de 0.



Forme limite de la loi binômiale quand n est grand

Considérons une urne de Bernoulli avec $p = 0,3$. Faisons $n = 5$ tirages.
On peut calculer les probabilités suivantes

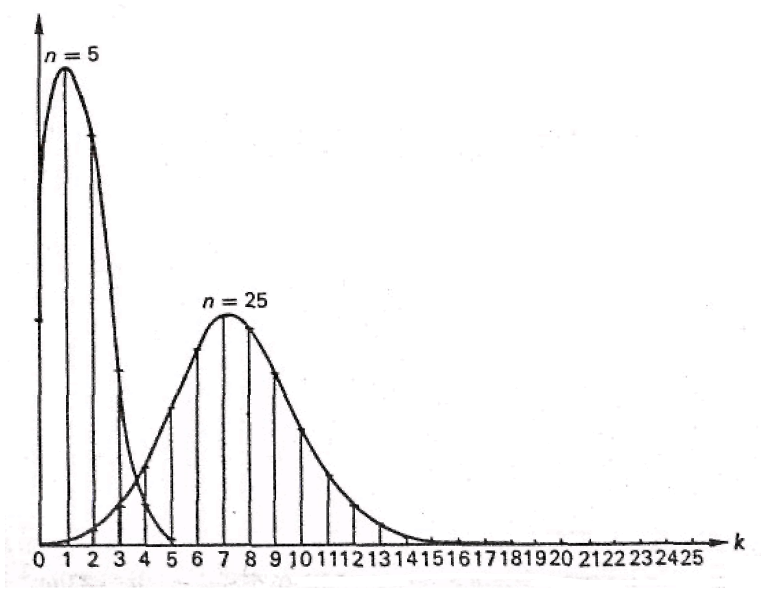
$$\begin{array}{lll} \mathrm{P(k=0)} = & P_0 = C_5^0\, 0.3^0\, 0.7^5 & = 0.1681 \\ & P_1 = C_5^1\, 0.3^1\, 0.7^4 & = 0.3601 \\ & P_2 = C_5^1\, 0.3^2\, 0.7^3 & = 0.3087 \\ & P_3 = C_5^3\, 0.3^3\, 0.7^2 & = 0.1323 \\ & P_4 = C_5^4\, 0.3^4, 0.7^1 & = 0.0283 \\ & P_5 = C_5^5\, 0.3^5\, 0.7^0 & = 0.0025 \end{array}$$

La moyenne est $5 \times 0.3 = 1.5$.
L'écart-type est : $\sqrt{5 \times 0.3 \times 0.7} = 1.02$.
Envisageons le cas où $n = 25$ tirages. Voici les probabilités que l'on trouve

$P_0 = 0.0001$	$P_6 = 0.1472$	$P_{12} = 0.0268$
$P_1 = 0.0014$	$P_7 = 0.1711$	$P_{13} = 0.0115$
$P_2 = 0.0074$	$P_8 = 0.1651$	$P_{14} = 0.0042$
$P_3 = 0.0243$	$P_9 = 0.1336$	$P_{15} = 0.0013$
$P_4 = 0.0572$	$P_{10} = 0.0916$	$P_{16} = 0.0003$
$P_5 = 0.1030$	$P_{11} = 0.0536$	P_{17} à $P_{25} < 0.0001$

La moyenne est $25 \times 0.3 = 7.5$. L'écart-type est : $\sqrt{25 \times 0.3 \times 0.7} = \sqrt{5.25} = 2.29$.

La représentation graphique en bâtons de ces deux distributions est :



Remarques :

1. L'étendue de la deuxième distribution est cinq fois plus grande que celle de la première, mais son écart-type n'est que *deux*, fois plus grand. Cela tient à ce que les valeurs $k = 0$, $k = 1$, d'une part, $k = 15$, $k = 16$, ..., $k = 25$ d'autre part, sont affectées de probabilités très faibles, et qu'il y a plus de 99 chances sur 100 que $2 < k < 14$.

   C'est ce que montre le graphique, où les valeurs des probabilités trop faibles n'ont pu être représentées.

2. La distribution est très asymétrique dans le cas $n = 5$, cela est du à ce que p est nettement différent de q. Elle est beaucoup plus symétrique dans le cas où $n = 25$. Elle le serait encore beaucoup plus pour $n = 100$.

Le nom de la loi binômiale provient du fait que $P(X = k)$ est donné par le terme de rang k du développement, suivant les puissances croissantes de p, du binôme de Newton : $(p + q)^n$.

La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes, répétés n fois de façon indépendante, pouvant prendre deux états (et deux seulement) : succès ou échec, oui ou non, état 0 ou état 1,...

Chacune de ces n expériences est appelée "tirage de Bernoulli". Une variable aléatoire binômiale X prendra pour valeurs le nombre k de succès en n expériences.
Seul le nombre de succès est pris en compte, sans que l'ordre où ils se réalisent intervienne.

La loi binômiale est la loi "théorique" la plus fréquente. Son utilisation pratique est, cependant, souvent limitée : on ne peut obtenir un résultat "rapide" que dans certains cas. Ceci explique que, dans des conditions, la loi binômiale peut être approchée par les lois de Poisson ou de Gauss, d'un usage plus commode.

Deux cas sont à distinguer, selon qu'on a affaire à une urne contenant un petit nombre ou un très grand nombre de boules.

- Urne contenant un petit nombre de boules : tirage avec remise
  Soit une urne contenant 10 boules, 7 blanches et 3 noires. Tirons sans regarder une boule après avoir secoué suffisamment. La probabilité de succès est $p = 7/10 = 0,7$.

  Si nous voulons que le second tirage soit indépendant du premier, il est nécessaire de remettre dans l'urne la boule tirée lors du premier. Faute de quoi, la probabilité de succès lors du deuxième tirage dépend du résultat du premier. Si en effet, la première boule tirée a été blanche, il reste dans l'urne 9 boules dont 6 blanche : la probabilité de succès est alors $6/9 =$ 0,666. Si au contraire, la première boule a été noire, la probabilité de succès au second tirage est de $7/9 = 0.78$.

- Urne contenant un très grand nombre de boules (urne infinie) : tirage sans remise autorisé
  Dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de remettre les boules tirées dans l'urne, car la probabilité de succès à chaque tirage n'est pas sensiblement modifiée par le résultat des tirages antérieurs.

  L'exemple donné précédemment est assimilable à une urne infinie. Il en est de même la plupart du temps, quand on effectue des sondages.

  Dans le cas de l'urne infinie, il est donc possible d'extraire à la fois les n boules.

Calcul pratique des probabilités

Le calcul de la valeur numérique de la probabilité attachée à chaque valeur de X s'obtient par l'expression $P(X = x) = C_n^x\, p^x\, q^{n-x}$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(5, 1/6)$. Ayant calculé la probabilité que le nombre X obtenu soit égal à 3, par exemple,

$$P_3 = P(X = 3) = C_5^3\, p^3\, q^2 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{7776} = 0.032,$$

on pourra obtenir les autres probabilités, avec un minimum de calculs, en utilisant la relation qui lie deux probabilités successives

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{n-x}{x+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Ainsi :

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{5-3}{3+1}\frac{1}{6}\frac{6}{5} = \frac{2}{4}\frac{1}{5} = \frac{1}{10} \quad \text{d'où} \quad P_4 = \frac{1}{10}P_3$$
$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{5-2}{2+1}\frac{1}{6}\frac{6}{5} = \frac{3}{3}\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \quad \text{d'où} \quad P_2 = 5P_3$$

Exemple 6.3.4 Loi de distribution binômiale

1. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de "piles" que l'on peut obtenir en jetant 10 fois une pièce régulière, $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$. On a : $n = 10$, $k = \{0, 1 \ldots, 10\}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$ $= C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Si X suit une loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2}) = \mathcal{B}(n, p)$, on a

$$E(X) = np = 10\frac{1}{2} = 5$$

Vérification :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = \sum_{k=0}^{10} kC_n^k\, p^k\, q^{n-k} \\ &= \frac{1}{1024}(0+10+90+360+840+1260+1260+840+360+90+10) \\ &= \frac{5120}{1024} = 5 \end{aligned}$$

$$Var(X) = npq = 10\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 2.5$$

Vérification :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ E(X^2) &= \sum_{k=0}^{10} k^2\, C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \\ &= \frac{1}{1024}(0+10+180+1080+3360+6300+7560+5880+2880+910+100) \\ &= \frac{28160}{1024} = 27.5 \\ &\Longrightarrow Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 27.5 - 5^2 = 2.5 \end{aligned}$$

2. Une urne contient des boules rouges en proportion $1/4$. On tire successivement 25 boules en remettant chaque fois la boule tirée. Si Y est le nombre de boules rouges que l'on peut obtenir, Y suit un loi $\mathcal{B}(25, \frac{1}{4})$ (tirage non exhaustif ou avec remise).
Si Y suit une loi $\mathcal{B}(25, \frac{1}{4})$, on a

$$E(Y) = n\,p = 25\frac{1}{4} = \frac{25}{4}, \quad Var(X) = npq = 25\frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{75}{16}.$$

6.3.1 Stabilité

Théorème 9 Si S_n et S_m sont deux variables **indépendantes** suivant des lois binomiales respectivement $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $S_m \sim \mathcal{B}(m,p)$ alors $S_n + S_m \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

Démonstration. Si $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $S_m \sim \mathcal{B}(m,p)$ sont deux variables binomiales indépendantes alors :

$$\begin{aligned}
& P((S_n + S_m) = k) = \\
= \; & P\left((S_n = 0 \cap S_m = k) \cup (S_n = 1 \cap S_m = k-1) \cup \ldots \cup (S_n = k \cap S_m = 0)\right) \\
= \; & \sum_{i=0}^{k} P(S_n = i \cap S_m = k-i) \text{ les événements étant incompatibles 2 à 2} \\
= \; & \sum_{i=0}^{k} P(S_n = i) P(S_m = k-i) \text{ car événements indépendants} \\
= \; & \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i} \, C_m^{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} \\
= \; & \sum_{i=0}^{k} C_n^i \, C_m^{k-i} \, p^k q^{n+m-k} \\
= \; & \left(C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0\right) p^k q^{n+m-k} \\
= \; & C_{n+m}^k p^k q^{n+m-k}.
\end{aligned}$$

D'où $S_n + S_m \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

6.4 Distribution hypergéométrique $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$

La loi binomiale correspond au tirage d'un échantillon avec remise dans une population comportant deux catégories d'individus. La loi hypergéométrique correspond, au contraire, au tirage d'un échantillon sans remise. La loi hypergéométrique a des propriétés moins simples et elle est d'une utilisation moins commode que la loi binomiale. Toutefois, dès que l'effectif N de la population est grand par rapport à celui n de l'échantillon, la loi hypergéométrique devient très proche de la loi binomiale et peut, en pratique, lui être assimilée.

Dans le cas de la loi binomiale, du fait de la remise de la boule dans l'urne, les tirages successifs étaient indépendants. Pour la variable hypergéométrique, il en va autrement : la probabilité de tirer une boule blanche au i-ème tirage : dépend du résultat des tirages antérieurs. En effet, la composition de l'urne varie au fur et à mesure des épreuves. L'effectif de l'urne s'épuise peu à peu, d'où le nom de tirage exhaustif donné à ce mode de sélection d'un échantillon.

Remarque. Contrairement à la loi binômiale, l'utilisation de cette loi nécessite la connaissance du nombre total $N = N_p + N_q$ d'éléments dans l'urne.

Définition 58 Supposons que l'on a N_p objets parmi N d'un certain type. On prélève un échantillon de n objets (sans remise). La loi hypergéométrique donne la probabilité que k objets parmi les n soient du type N_p. La loi de probabilité est donnée par :

$$P(X=k)=\frac{C_{N_p}^{k}C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}, k\in\{0,\dots,\min(n,N_p)\}.$$

Une telle distribution correspond à un modèle d'urne et des tirages sans remise (tirages exhaustifs). Dans ce cas p et q ne restent pas constants.

Notation : $X\sim\mathcal{H}(N,n,p)$

Paramètres : $\mu=E(X)=np$, (comme dans le cas de la loi binômiale)
$Var(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$.

Exemple 6.4.1 Soit une urne contenant 10 boules dont 2 blanches B et 8 rouges R. La loi hypergéométrique correspondant au tirage d'un échantillon dans cette urne a pour paramètres :
$N=10$, l'effectif de la population ;
n, la taille de l'échantillon ;
$p=0.2$, la proportion de boules blanches (composition de l'urne).

Les différents événements possibles s'obtiennent, comme dans le cas de la loi binomiale, suivant un schéma en arbre. Il faut toutefois prendre garde que, à partir du 3e tirage, les boules blanches peuvent être épuisées : la variable hypergéométrique X="nombre de boules rouges tirées" ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou 2.

On obtient, pour les trois premiers tirages, les lois de probabilité les suivantes :

Événement élémentaire	Variable aléatoire X	Probabilité $P\{X\}$
	1^{er} tirage : $n=1$	
B	1	$2/10$
R	0	$8/10$
	2^e tirage : $n=2$	
BB	2	$\frac{2}{10}\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$
BR, RB	1	$\frac{2}{10}\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\frac{2}{9}=\frac{16}{45}$
RR	0	$\frac{8}{10}\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$
	3e tirage : $n=3$	
BBR, BRB, RBB	2	$\frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\frac{8}{9}\frac{1}{8}+\frac{8}{10}\frac{2}{9}\frac{1}{8}=\frac{3}{45}$
BRR, RBR, RRB	1	$\frac{2}{10}\frac{8}{9}\frac{7}{8}+\frac{8}{10}\frac{2}{9}\frac{7}{8}+\frac{8}{10}\frac{7}{9}\frac{2}{8}=\frac{21}{45}$
RRR	0	$\frac{8}{10}\frac{7}{9}\frac{6}{8}=\frac{21}{45}$

Au 3e tirage, par exemple, la variable X prend la valeur 2 pour chacun des événements élémentaires :

$$B_1B_2R_3,\quad B_1R_2B_3,\quad R_1B_2B_3,$$

l'indice indiquant le rang du tirage.

La probabilité de l'événement B_1, B_2, R_3 est, en vertu de la formule des probabilités composées, égale à :

$$P\{B_1B_2R_3\} = P\{B_1\}.P\{B_2|B_1\}.P\{R_3|B_1B_2\}.$$

Après avoir obtenu une boule blanche au 1^{er} tirage, il reste dans l'urne 9 boules dont 1 blanche. Par conséquent, la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage, sachant qu'on en a déjà tiré une au premier est :

$$P\{B_2|B_1\} = \frac{1}{9}.$$

De façon analogue :

$$P\{R_3|B_1B_2\} = \frac{8}{8} = 1,$$

d'où :

$$P\{B_1B_2R_3\} = \frac{2}{10}\frac{1}{9}\frac{8}{8} = \frac{1}{45}.$$

On calcule de même :

$$\begin{aligned} P\{B_1R_2B_3\} &= \frac{2}{10}\frac{8}{9}\frac{1}{8} = \frac{1}{45} \\ P\{R_1B_2B_3\} &= \frac{8}{10}\frac{2}{9}\frac{1}{8} = \frac{1}{45} \end{aligned}$$

La probabilité pour que la variable X soit égale à 2, valeur correspondant à la réalisation de l'un ou l'autre de ces 3 événements élémentaires est donc égale à $3/45$:

$$P\{X = 2\} = P\{B_1B_2R_3\} + P\{B_1R_2B_3\} + P\{R_1B_2B_3\} = 3/45.$$

D'une façon générale, au n-ème tirage, la probabilité pour que la variable X prenne la valeur x est :

$$P_x = P\{X = x\} = \frac{C_{N_p}^x C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n}.$$

Représentons en effet chacune des N boules de l'urne par un nombre :

$$\underbrace{1, 2, \ldots, N_p}_{\text{boules blanches},} \quad \underbrace{N_p + 1, \ldots, N}_{\text{boules rouges}} .$$

Si l'échantillon est tiré au hasard, chacune des C_N^n, combinaisons que l'on peut faire en choisissant n boules parmi les N contenues dans l'urne sont équiprobables : ce sont les éventualités possibles.

Parmi celles-ci. dénombrons celles qui correspondent à la présence de x boules blanches et $n-x$ boules rouges. Il y a $C_{N_p}^x$ façons de choisir x boules blanches parmi les N_p boules blanches contenues dans l'urne. A chacune de ces combinaisons correspondent $C_{N_q}^{n-x}$ façons de prélever les $n-x$ boules rouges complémentaires parmi les N_q boules rouges contenues dans l'urne, y a donc, au total :

$$C_{N_p}^x C_{N_q}^{n-x}$$

éventualités favorables à l'obtention de x boules blanches.

Le nombre x de boules blanches dans l'échantillon ne peut prendre de valeurs supérieures soit à l'effectif n de l'échantillon, soit au nombre N_p de boules blanches contenues dans l'urne :

$$x \leq \min(n, N_p).$$

Le même raisonnement est valable pour les $n - x$ boules rouges de l'échantillon :

$$n - x \leq \min(n, N_q),$$

d'où :

$$x \geq \max(0, n - N_q).$$

On a donc, en définitive :

$$\max(0, n - N_q) \leq x \leq \min(n, N_p).$$

En résumé, la variable hypergéométrique X est une variable aléatoire discrète qui dépend des 3 paramètres :
N, effectif de la population,
p, proportion primitive de boules blanches dans celle-ci,
n, nombre de tirages successifs (effectif de l'échantillon).

Les valeurs possibles de cette variable sont :

$$\max(0, n - N_q) \leq x \leq \min(n, N_p)$$

et la probabilité de la valeur x est :

$$P(X = x) = \frac{C_{N_p}^{x} C_{N_q}^{n-x}}{C_N^n}.$$

Notons que, si l'effectif n de l'échantillon est inférieur à la fois à l'effectif N_p des boules blanches et à celui N_q des boules rouges, les valeurs possibles sont, comme dans le cas de la loi binomiale :

$$0 \leq x \leq n.$$

La loi hypergéométrique est utilisée pour modéliser un "tirage sans remise". C'est le cas de pratiquement tous les sondages (notamment lorsqu'on veut étudier la conformité d'un lot de produits, etc. . .).

Exemple 6.4.2 Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et de 6 femmes. On choisit dans ce groupe un échantillon de 4 personnes. Déterminer la loi de probabilité du nombre de femmes que l'on peut observer dans un tel échantillon ; calculer son espérance et sa variance.

Solution : Il s'agit d'une loi hypergéométrique

$$X \sim \mathcal{H}(10, 4, 6/10)$$

$p = \frac{6}{10}$, $n = 4$, $N = 10$, $N_p = 6$, $N_q = 4$, $p_0 = \frac{C_6^0 C_4^4}{C_{10}^4}$, $p_1 = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4}$, $p_2 = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4}$, $p_3 = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4}$, $p_4 = \frac{C_6^4 C_4^0}{C_{10}^4}$.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{15}{210}$

$E(X) = n\,p = 4\frac{6}{10} = 2.4$; $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 4\frac{6}{10}\frac{4}{10}\frac{10-4}{10-1} = 0.64.$

Exemple 6.4.3 Un électricien achète des composants par paquets de 10. Sa technique de contrôle est de n'examiner que trois des composants, tirés au hasard dans le paquet et de n'acheter le lot des 10 paquets que si les trois composants examinés sont sans défaut. Si 5 pour-cents des paquets contiennent deux composants à malfaçon, si 25 pour-cents n'en contiennent qu'un et si 70 pour-cents n'en contiennent aucun, quelle est la probabilité que l'électricien achète un paquet.

Solution : On note A l'événement "l'électricien achète un paquet" et B_i l'événement "le paquet contient i composants à malfaçon". On a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_0)P(B_0) \\ &= \frac{C_8^3 C_2^0}{C_{10}^3}0.05 + \frac{C_9^3 C_1^0}{C_{10}^3}0.25 + \frac{C_{10}^3 C_0^0}{C_{10}^3}0.70 \\ &= \frac{539}{600} = 0.8983. \end{aligned}$$

Approximation : si le nombre de tirages total n est petit devant la taille de l'urne N alors les tirages sans remise s'apparentent à des tirages avec remise : en effet, ce qui différencie principalement ces deux sortes de tirages c'est qu'en faisant des tirages sans remise,

1. on modifie le contenu de l'urne au fil des tirages,
2. on obtient à chaque fois une boule différente.

Maintenant, si le nombre de boules de l'urne est vraiment grand par rapport à n : le fait d'enlever les boules tirées ne va pas modifier réellement l'urne, et même si on remet les boules, il n'y a quasiment aucune chance de tirer deux fois la même !

Le fait que quand l'effectif N de la population devient très grand, n et p demeurant fixes, la loi hypergéométrique tend vers la loi binômiale, permit d'appliquer la loi binômiale aux sondages et aux procédures d'estimation sur échantillon. En effet, la plupart des échantillons sont, en réalité, prélevés par tirage exhaustif, de façon à ce qu'un même individu ne puisse être désigné deux fois.

En pratique : si $N > 10n$, (le taux de sondage n/N est inférieur à 10 %) la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N; n; p)$ est approchée par la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ (puisque $p = N_p/N$ est la proportion quasi-constante des individus du type considéré).

Approximation d'une loi hypergéométrique par la loi binômiale

Soit X une variable aléatoire de loi hypergéométrique. On a :

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{C_{N_p}^{x} C_{N_q}^{n-x}}{C_N^n} \\
&= \frac{N_p!}{x!(N_p-x)!}\frac{(N_q)!}{(n-x)!(N_q-n+x)!}\frac{n!(N-n)!}{N!} \\
&= \frac{n!}{x!(N_p-x)!}\frac{N_p(N_p-1)\dots(N_p-x+1)}{N(N-1)\dots(N-x+1)}\frac{N_q(N_q-1)\dots(N_q-n+x+1)}{(N-x)(N-x-1)\dots(N-n+1)} \\
&= C_n^x \frac{N_p}{N}\frac{N_p-1}{N-1}\dots\frac{N_p-x+1}{N-x+1}\frac{N_q}{N-x}\frac{N_q-1}{N-x-1}\dots\frac{N_q-n+x+1}{N-n+1}
\end{aligned}$$

Si on suppose maintenant que $N \to +\infty$ et que $\frac{N_p}{N} \to p$, on a :

- $$\frac{N_p}{N} \to p, \quad \frac{N_p-1}{N-1} = \frac{\frac{N_p}{N}-\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}} \to p, \dots, \frac{N_p-x+1}{N-x+1} = \frac{\frac{N_p}{N}-\frac{x-1}{N}}{1-\frac{x-1}{N}} \to p;$$

on dénombre k fractions de ce type.

- $$\frac{N_q}{N-x} = \frac{1-\frac{N_p}{N}}{1-\frac{x}{N}} \to 1-p, \dots, \frac{N_q-n+x+1}{N-n+1} = \frac{1-\frac{N_p}{N}-\frac{n-x-1}{N}}{1-\frac{n-1}{N}} \to 1-p;$$

on dénombre $n-k$ fractions de ce type.

En conclusion : si $N \to +\infty$ et si $\frac{N_p}{N} \to p$, on a :

$$\frac{C_{N_p}^{x} C_{N_q}^{n-x}}{C_N^n} \to C_n^x \, p^x \, q^{n-x}.$$

Ce résultat mathématique peut être utilisé de la manière suivante :
La variable X représente le nombre d'individus d'un type donné que l'on peut trouver dans un échantillon de taille n extrait d'une population de taille N (le lac) contenant N_p individus du type considéré. L'échantillon peut être obtenu par n tirages successifs sans remise. Si la taille de la population est très grande devant celle de l'individu ($n << N$), de manière à ce que l'on puisse considérer qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir un individu du type considéré demeure pratiquement égale à celle du premier tirage ($\frac{N_p}{N}$), la loi de X peut être assimilée à une loi binômiale $\mathcal{B}(n, p = \frac{N_p}{N})$. On remarquera, en particulier, que cette approximation conserve l'espérance :

$$E(X) = n\frac{N_p}{N} = np$$

et, pratiquement, la variance :

$$Var(X) = n\frac{N_p}{N}\left(1-\frac{N_p}{N}\right)\left(\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}\right) \approx n\,p\,q,$$

car $\left(\frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}}\right) \approx 1$.

B. Lois infinies

6.5 Loi géométrique ou de Pascal $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0,1)$

La loi géométrique est la loi du premier succès, c'est-à-dire le nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p.

Définition 59 On répète de façon indépendante une expérience de Bernoulli autant de fois qu'il faut pour obtenir un succès. Soit X, le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le 1-er succès. X suit une **loi géométrique de paramètre** p ou **loi de Pascal** de probabilité :

$$P(X = n) = p_n = pq^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots .$$

Notation : $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0,1)$
Démonstration. X ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \dots, n, \dots$. Ces valeurs sont strictement positives, entières, mais ne sont pas limitées. Calculons $p_n = P(X = n)$. Notons w_i le résultat du i-ème tirage avec $w_i = 0$ si le i-ème tirage est un échec et $w_i = 1$ si le i-ème tirage est un succès. L'événement $X = n$ s'écrit alors

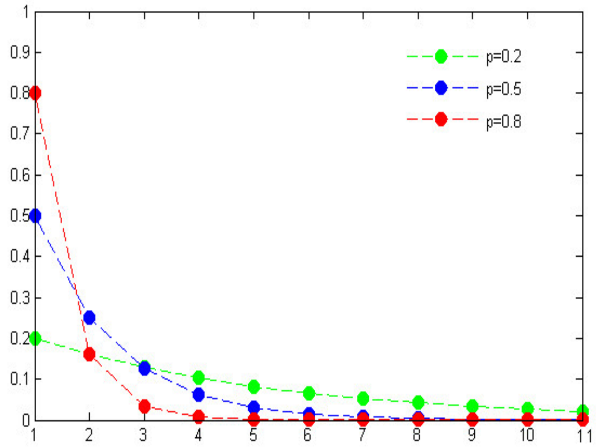
$$(X = n) = (w_1 = 0 \text{ et } w_2 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } w_{n-1} = 0 \text{ et } w_n = 1).$$

Compte tenu de l'indépendance des tirages, on peut écrire

$$P(X = n) = P(w_1 = 0)P(w_2 = 0) \dots P(w_{n-1} = 0)P(w_n = 1).$$

soit encore

$$P(X = n) = p_n = pq^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots .$$



6.5.1 Paramètres

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}; \quad \sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration
Espérance

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ est la dérivée par rapport à q de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
Donc $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$ et $E(X) = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{p}$.

Variance.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \frac{1}{p^2} \\ E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)pq^{n-1} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)pq^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)pq^{n-1} = pq\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2}$ est la dérivée seconde de $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ par rapport à q.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 2\frac{q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \\ Var(X) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Exemple 6.5.1 Un béton globalement conforme à une certaine norme est échantillonné. Chaque éprouvette a une probabilité 0.9 de réussir le test de conformité. Quelle est la distribution du nombre d'éprouvettes devant être testées avant d'en observer une qui ne réussit pas le test ? (Note : ici le «succès» est «échouer le test» et le p correspondant est 0.1).

$$\begin{aligned} P(X = n) &= p\,.\,q^{n-1} \\ P(X = 1) &= p\,.\,q^{1-1} = p\,.\,q^0 = 0.1 \\ P(X = 2) &= p\,.\,q^1 = 0.1 * 0.9 = 0.09 \\ P(X = 3) &= 0.1 * 0.9^2 = 0.081 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Quel est **le nombre moyen** d'éprouvettes que l'on devra tester avant d'en trouver une qui échoue le test ?

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

La formule de récurrence $P(X = n+1) = P(X = n)(1-p)$ montre, puisque $0 < 1-p < 1$, que les probabilités successives décroissent constamment ; **le mode** a donc pour valeur 1.

Cas typique

Le tirage avec remise de n boules dans une urne ne contenant que deux types de boules (on s'intéresse à l'indice de la première obtention d'une boule d'un certain type) ;...

Exemple 6.5.2 On tire avec remise une boule dans une urne contenant 113 boules blanches et 7 boules noires. A priori, combien devra-t-on effectuer de tirages pour obtenir une boule noire pour la première fois ?
Solution :
La v.a. X = "obtenir une boule noire pour la première fois" suit une loi géométrique de $p = \frac{7}{120}$. D'après la formule de l'espérance mathématique de la loi géométrique on obtient $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{120}{7}$, et donc, il faudra s'attendre à exécuter entre 17 et 18 tirages pour voir apparaître pour la première fois une boule noire.

Exemple 6.5.3 Un homme ivre rentre chez lui avec 10 clés différentes dans sa poche. Pour ouvrir la porte, il essaie une clé au hasard et, si la porte ne s'ouvre pas, il remet la clé dans sa poche et recommence. X est le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre.
Donner l'ensemble fondamental Ω de la variable aléatoire X et la probabilité qui la décrit. Puis, préciser le nom de la loi, ses paramètres, et, pour $k \in X(\Omega)$, donner l'expression de $P(X = k)$.
Solution :
L'essai d'une clé au hasard est une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles :

- le succès : la porte s'ouvre. Sa probabilité est la probabilité $p = \frac{1}{10}$ d'avoir choisi la bonne clé.
- l'échec : la porte ne s'ouvre pas. Sa probabilité est $q = 1 - p = \frac{9}{10}$.

On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante.
Un résultat élémentaire w_n de l'expérience aléatoire est une suite de $n - 1$ échecs suivis d'un succès, $n \in \mathbb{N}$.
Ω est l'ensemble des w_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
Les w_n, pour $n \in \mathbb{N}$, constituent les événements élémentaires (parties minimales pour l'inclusion).
Un événement est une partie de Ω.
Tout événement est réunion des événements élémentaires qu'il contient.
La probabilité d'un résultat élémentaire est donnée par le produit des probabilités des résultats des épreuves de Bernoulli qui le composent :

$$P(w_n) = pq^{n-1}.$$

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qu'il contient.
Soit X le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli qu'il faut faire pour rencontrer un succès. L'événement $X = n$, pour un $n \in \mathbb{N}$, est l'événement élémentaire w_n.
La loi de probabilité de X est donc donnée par : $P(X = k) = P(w_k) = pq^{k-1}$.
C'est la loi géométrique sur $\mathbb{N}$.

Définition 60 Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$. On effectue plusieurs tirages d'une boule dans l'urne sans remise. n est le nombre de tirages. La variable X qui signifie le nombre de tirages pour obtenir la première boule blanche suit la **loi de Pascal sans remise** $X \sim \mathcal{S}(N, p)$, dont les probabilité se calculent par :

$$P(X = k) = \frac{C_{N-M}^{k-1}}{C_N^{k-1}} \frac{M}{N - k + 1}, \quad \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq N - M + 1\}$$

Paramètres :

$$E(X) = \frac{N+1}{M+1} \quad Var(X) = q\frac{NM(N+1)}{(M+1)^2(M+2)}.$$

6.6 Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

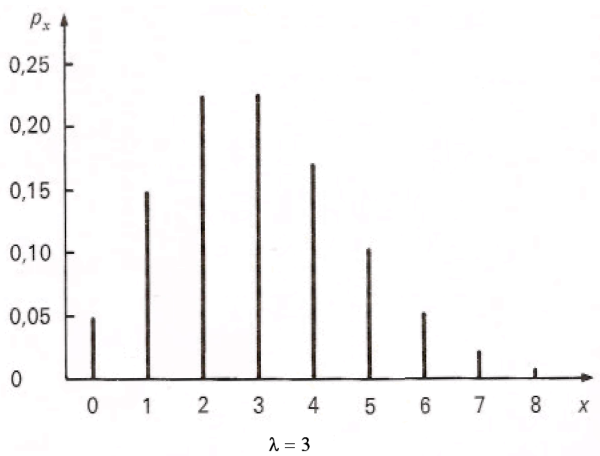
Une v.a. de Poisson intervient quand on étudie le nombre d'apparitions d'un phénomène rare et sans mémoire dans un intervalle de temps donné t.

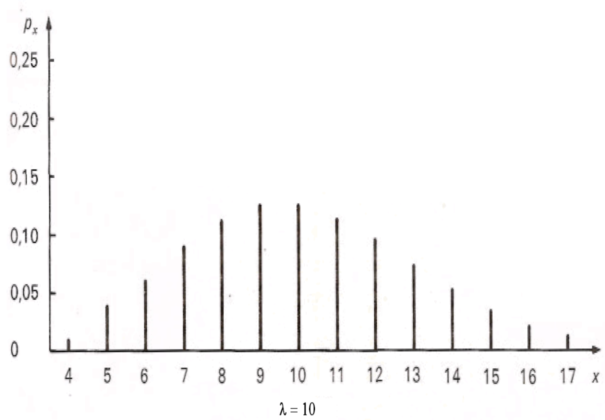
La loi de Poisson (dite aussi la loi des petits nombres) est la loi des événements rares (de petite probabilité) : maladies rares, accidents rares, pannes, radioactivité...

La loi de Poisson convient à la description des événements dont les chances de réalisation sont faibles. Comme dans le cas de la distribution binomiale, il est nécessaire pour que la loi s'applique que la probabilité de réalisation de l'événement reste constante.

Définition 61 Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ réel strictement positif) si elle admet pour fonction de distribution l'ensemble des couples (k, p_k) avec $k = 0, 1, 2, \ldots$ et

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \quad /POISSON(k; \lambda; 0)/$$





Notation : $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$

Fonction de répartition :

$$F(k) = P(X < k) = \sum_{0 \leq i < k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}. \quad /POISSON(k-1; \lambda; 1)/$$

Paramètres :

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda.$$

Démonstration

Pour l'espérance mathématique de la distribution de Poisson on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Le premier terme de la somme étant nul, on peut faire débuter celle-ci à 1.

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

On reconnaît dans la série infinie, la somme des probabilités d'une variable aléatoire de Poisson, égale par conséquent à l'unité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = 1.$$

Par suite :

$$E(X) = \lambda.$$

Le calcul de la variance est analogue dans son principe à celui de la moyenne.

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Les deux premiers termes de la somme sont nuls : on peut faire débuter celle-ci à 2 et mettre m^2 en facteur :

$$E\{X(X-1)\} = m^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-2}}{(k-2)!}.$$

Faisons le changement de variable :

$$k' = k - 2.$$

On obtient

$$E\{X(X-1)\} = m^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k'}}{k'!}$$

La série infinie est égale à 1 puisqu'elle représente la somme des probabilité attachées à une variable de Poisson.
Par conséquent :

$$E\{X(X-1)\} = \lambda^2.$$

Calcul pratique des probabilités

Les différentes probabilités se calculent aisément grâce à la formule de récurrence :

$$P(X = k+1) = P(X = k)\frac{\lambda}{k+1}$$

Si, par exemple, on suppose que X suit une loi $\mathcal{P}(2.2)$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= e^{-2.2} \approx 0.110803 \\
P(X=1) &= P(X=0)\frac{2.2}{1} \approx 0.243767 \\
P(X=2) &= P(X=1)\frac{2.2}{2} \approx 0.268144 \\
P(X=3) &= P(X=2)\frac{2.2}{3} \approx 0.196639 \\
&\dots
\end{aligned}$$

La distribution est de type **unimodal** et admet pour mode l'entier, en général unique, situé dans l'intervalle $[\lambda-1, \lambda]$ ou exceptionnellement deux modes successifs, équiprobables, bornes de l'intervalle ci-dessus lorsque λ a une valeur entière. La position du mode se déduit aisément de la formule de récurrence donnée ci-dessus.

Démonstration :
Le mode est la valeur de la variable aléatoire pour laquelle la probabilité est la plus élevée. C'est l'entier x tel que :

$$\begin{aligned}
&\frac{P_{x-1}}{P_x} < 1 \quad et \quad \frac{P_{x+1}}{P_x} < 1. \\
&\frac{P_{x-1}}{P_x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\frac{x!}{e^{-\lambda}\lambda^x} = \frac{x}{\lambda}. \\
&\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(x+)!}\frac{x!}{e^{-\lambda}\lambda^x} = \frac{\lambda}{x+1}.
\end{aligned}$$

Pour être la valeur modale x doit donc vérifier simultanément :

$$\frac{x}{\lambda} < 1 \quad et \quad \frac{\lambda}{x+1} < 1,$$

soit :

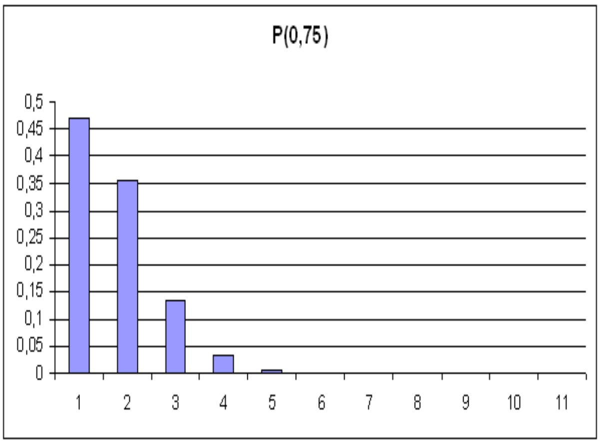
$$\lambda - 1 < x < \lambda.$$

Lorsque λ est entier, il y a deux valeurs modales : $\lambda - 1$ et λ

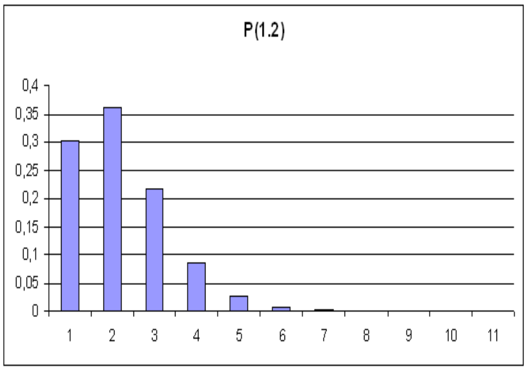
Forme de la distribution

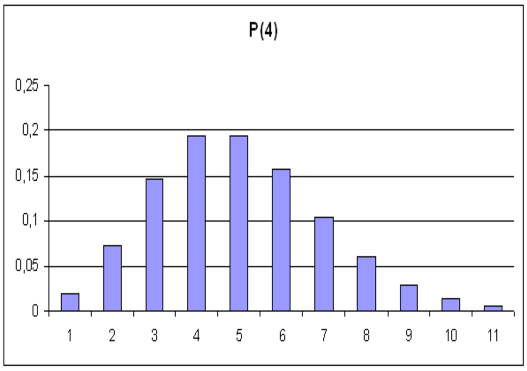
La forme d'une distribution de Poisson se déduit de la valeur du mode :

- Forme en L si $\lambda \leq 1$;



- Forme en cloche dissymétrique pour $\lambda > 1$. Le mode se déplace vers la droite lorsque λ augmente.





Conditions d'application

La loi de Poisson peut être introduite :

- soit comme un cas particulier de la loi binômiale : c'est la loi vers laquelle tend celle-ci lorsque le nombre n d'épreuves devient grand, alors que la probabilité p de réalisation de l'événement est faible ; c'est la raison pour laquelle la loi de Poisson a été souvent appelée "loi des petits nombres " ;

- soit comme la résultante d'un processus aléatoire particulier, le processus de Poisson.

Processus de Poisson

Un processus se rapporte à la réalisation d'événements aléatoires dans le temps, par exemple : pannes de machines, arrivées de bateaux dans un port pour chargement, appels téléphoniques sur une ligne, arrivées de clients à un comptoir...

Supposons que la réalisation d'un événement particulier (par exemple, un appel téléphonique) obéisse aux conditions suivantes :

- La probabilité de réalisation de l'événement au cours d'une petite période de temps $\mathrm{d}t$ est proportionnelle à la durée de cette période : $p\ \mathrm{d}t$;
- Cette probabilité est indépendante du nombre d'événements qui se sont produits antérieurement, et reste constante au cours de la période d'observation.
- La probabilité de deux apparitions successives de cet événement sur un même petit intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est négligeable.

Moyennant ces hypothèses, le nombre X d'événements enregistrés au cours d'un intervalle de temps de durée T est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = pT$.

Cette propriété explique que l'on rencontre en pratique la loi de Poisson dans d'assez nombreux cas où les hypothèses précédentes sont plus ou moins rigoureusement satisfaites. Il en est ainsi pour :

- Les arrivées de navires dans un port, de véhicules à un péage d'autoroute, de camions à un poste de chargement, d'avions à un aéroport, de clients à un guichet ;
- Les pannes de machines ;
- Les appels téléphoniques ;
- Les ventes d'un appareil déterminé dans un magasin, la demande d'un certain modèle de pièce de rechange en réserve ;
- L'émission de particules radio-actives, etc.

Exemple 6.6.1 Dans un hôtel, il arrive en moyenne 1.2 personne par 10 minutes, entre 15h et 21h. On prend pour variable aléatoire X le nombre de personnes arrivant dans cet hôtel en 10 minutes, dans cet horaire particulier. On admet que X suit une loi de Poisson.

- Déterminez la probabilité pour qu'en 10 minutes, il arrive k personnes.
  Réponse : $P(X = k) = \frac{1.2^k e^{-1.2}}{k!}$ car la moyenne donne la valeur du paramètre λ.
- Déterminez la probabilité pour qu'en 10 minutes, il arrive 2 personnes.
  Réponse :

$$P(X = 2) = 0.2169. \text{ de la table Distribution de Poisson pour } \lambda = 1.2 \text{ et } X = 2.$$

- Déterminez la probabilité pour qu'en 10 minutes, il arrive 4 personnes au plus.
  Réponse :

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &=? \quad \text{de la table Fonction de répartition de Poisson pour } \lambda = 1.2 \text{ et } X = 4. \\ P(X \leq 4) &= 0.9923 \end{aligned}$$

- Déterminez la probabilité pour qu'en 10 minutes, il arrive 3 personnes au moins.
  Réponse :

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &\quad \text{de la table fonction de répartition de Poisson pour } \lambda = 1.2 \text{ et } X = 2 : \\ &\quad P(X \leq 2) = 0.8795 \\ P(X \geq 3) &= 1 - 0.8795 = 0.1205. \\ P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - 0.3012 - 0.3614 - 0.2169 = 1 - 0.8795 = 0.1205 \end{aligned}$$

- Déterminez la probabilité pour qu'en 5 minutes, il arrive 6.
  Réponse : Puisque 1.2 est le nombre moyen d'arrivées en 10 minutes, $1.2/10 = 0.12$ est le nombre moyen d'arrivées en une minute et $5 \times 0.12 = 0.6$ est le nombre moyen d'arrivées en cinq minutes. Ainsi la probabilité de 6 arrivées en cinq minutes avec $\lambda = 0.6$ est donnée dans la table de la distribution de Poisson pour $\lambda = 0.6$ et $X = 6$.

$$P(X = 6) = 0.$$

6.6.1 Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

La distribution de Poisson peut être considéré comme un cas limite de la distribution binomiale. Si n est «grand» et p «petit», on peut approximer la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. On cherche la limite de $P(X = k)$ lorsque : n tend vers l'infini, p tend vers zéro, le produit np tend vers une valeur finie λ. On a :

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! n^k} \frac{(np)^k}{k!} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^k}.$$

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = 1 \quad \text{car :}$
  $$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)! n^k} &= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$
- $\displaystyle\lim_{p \to 0} (1-p)^k = 1$
- $\log(1-p)^n = n \log(1-p) \approx -np \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty \quad \text{et} \quad p \to 0.$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty, p \to 0, np \to \lambda} (1-p)^n = e^{-\lambda}$$

En conclusion, lorsque n tend vers l'infini, p tend vers zéro, de sorte que le produit np tend vers une constante λ la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ converge vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ puisque :

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ce résultat est très intéressant en pratique ; il permet de remplacer la loi binomiale par la loi de Poisson lorsque n est grand, p petit, le produit np étant de l'ordre de quelques unités. Le développement binomial :

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

remplacé par le développement infini :

$$e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots \right).$$

de sorte que la variable X théoriquement susceptible de prendre, non plus un nombre limité, mais un nombre infini de valeurs possibles. En réalité, les probabilités deviennent rapidement si petites que la représentation de la distribution d'une variable discrète finie par une loi de Poisson est possible.

Habituellement on accepte de substituer la loi de Poisson à la loi binomiale lorsque l'on a à la fois :

$$n > 30; \quad n\,p < 5 \quad \text{ou}\; n\,q < 30$$

Certains auteurs donnent des conditions de validité de l'approximation légèrement différentes comme par exemple :

$$n > 50; \quad p \leq 0.1; \quad npq < 20.$$

Mais quelles que soient les approches, on doit toujours avoir :

- n suffisamment grand (au minimum $n = 30$)
- p petit (au maximum $p = 0.10$)

Dans tous les cas, lorsqu'on utilisera cette approximation on prendra :

$$\lambda = \text{ espérance d'une v.a. binômiale } = np.$$

L'intérêt de pouvoir remplacer la loi binomiale par la loi de Poisson est la plus grande commodité d'emploi de cette dernière : celle-ci ne dépendant que d'un seul paramètre λ, les tables donnant les probabilités de la loi de Poisson sont des tables à double entrée (λ et k) qui tiennent au maximum en quelques pages, au lieu d'un fort volume pour les tables à triple entrée (n, p et k) de la loi binomiale.

Cette convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson explique que l'on rencontre celle-ci, par exemple, dans les cas suivants :

- Nombre de pièces défectueuses dans un échantillon important prélevé au cours d'un processus de fabrication en série : en général, la proportion de pièces défectueuses dans l'ensemble de la fabrication est faible ;
- Nombre d'erreurs commises lors de l'inventaire d'un stock comportant un grand nombre d'articles différents ; d'une façon générale, nombre d'erreurs commises au cours d'une longue suite d'opérations.

Exemple 6.6.2 La probabilité de rupture de stock pendant un mois est de $1/30$.

1. Soit X le nombre de mois durant lesquels il y a une rupture de stock pendant une période de 5 ans. Quelle loi suit X ?
2. Calculer $P(X \geq 2)$ et donner sa signification.
3. Comment peut-on approximer cette loi ? Calculer $P(1 < X < 5)$ et $P(1 < X \leq 5)$.

Solution

1. Il y a $12 \times 5 = 60$ mois $= 60$ épreuves pour lesquelles le risque de rupture est de $1/30$.

   Ces épreuves sont supposées indépendantes (une rupture au cours d'un mois n'a pas de conséquence les mois suivants) $\Longrightarrow p = 1/30$, $q = 29/30$.

   Pour chaque épreuve, il y a 2 résultats possibles (rupture ou non).

   $$X \sim \mathcal{B}(60, 1/30).$$

2. $$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - 0.1308 - 0.2706 = 0.5986. \\ P(X = 0) &= C_{60}^{0}(1/30)^{0}(29/30)^{60} = 0.1308 \\ P(X = 1) &= C_{60}^{1}(1/30)^{1}(29/30)^{59} = 0.2706. \end{aligned}$$

   La probabilité de constater une rupture de stock pendant 2 mois ou plus durant cette période de 5 ans est de 59,86%.

3. $$n = 60 > 30, \quad np = 60 \times 1/30 = 2 \leq 5$$

   On peut approximer la loi binômiale par une loi de Poisson de paramètre :

   $$\lambda = np = 2 \to X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2).$$

   $$\begin{aligned} P(1 < X < 5) &= P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 0.9473 - 0.4060 = 0.5413 \\ P(1 < X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 0.9834 - 0.4060 = 0.5774 \end{aligned}$$

   Où les valeurs pour $P(X \leq 5)$, $P(X \leq 4)$ et $P(X \leq 1)$ on peut lire directement de la table de Poisson - Fonction de répartition de Poisson de l'Annexe.

Test sur le chapitre : Lois de probabilité discrètes particulières

5.2 Lois de probabilités discrètes Énumérez les lois que vous connaissez en mentionnant le groupe au quel elles appartient.

5.2.1 Quand dit-on qu'une loi de probabilité est uniforme ?
Dans cette situation, comment calcule-t-on la probabilité d'un événement ?

5.2.2 Décrivez la loi de Bernoulli.
Détaillez le calcul de son espérance et de son écart-type.

5.2.3 Décrivez la loi binômiale. Que valent l'espérance et l'écart-type d'une loi binomiale ?

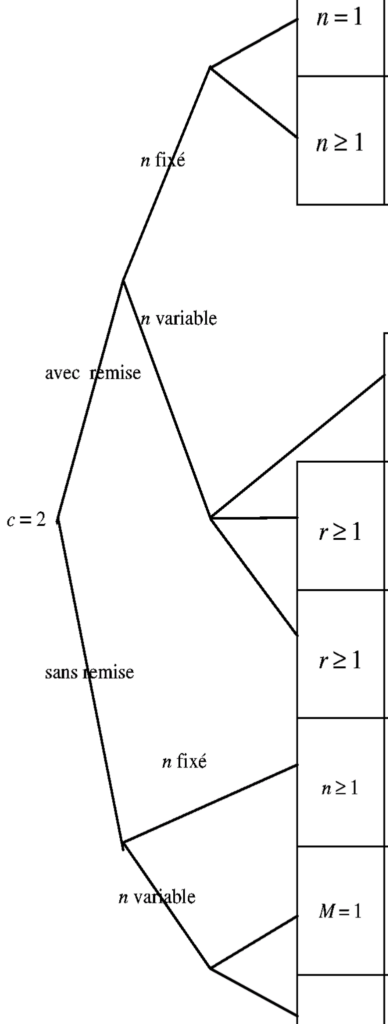
5.2.4 Décrivez la loi hypergéométrique. Quand peut-on approximer la loi hypergéométrique par la loi binômiale ?

5.2.5 Décrivez la loi géométrique.

5.2.7 Décrivez la loi de Poisson. Dans quelles conditions la loi binômiale peut être approximer par la loi de Poisson ?

6.6.2 Lois discrètes présentées par des modèles d'urne

Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$.
Pour $1 \leq i \leq c$, on appelle M_i le nombre de boules de couleur i et on pose $p_i = \frac{M_i}{N}$.
On effectue un ou plusieurs tirages d'une boule dans l'urne. n est le nombre de tirages.



	Expérience	Variable aléatoire X	Loi de X
$n=1$	On effectue un seul tirage.	nombre de boules blanches obtenues	Bernoulli $\mathcal{B}(1\,,p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages avec remise.	nombre de boules blanches obtenues	Binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$ approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ quand $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1$
	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche	Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1\,,p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal $\mathcal{R}(r\,,p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages de boules non blanches avant d'obtenir la r-ième boule blanche	Binomiale négative $\mathcal{BN}(r\,,p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages sans remise.	nombre de boules blanches obtenues	Hypergéométrique $\mathcal{H}(N\,,n\,,p)$
$M=1$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche	Uniforme $\mathcal{U}(N)$ ou $\mathcal{S}(N\,,1\,,p)$
$M \geq 1$ $1 \leq r \leq M$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal sans remise $\mathcal{S}(N\,,r\,,p)$

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
Lois usuelles discrètes finies				
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$	$P(X = k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Lois usuelles discrètes infinies				
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal $\mathcal{R}(r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; k \geq r\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r\, q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; r \leq k \leq N - M + r\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{r-1} \times \binom{N-M}{k-r}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M-r+1}{N-k+1}$	$r\frac{N+1}{M+1}$	$rq\frac{N(N+1)(M-r+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Binômiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r\, q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Chapitre 7

Variable aléatoire continue (à densité)

Définition 62 **Variable aléatoire continue :** X est une variable qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini. Cela signifie que la différence entre deux valeurs voisines peut être aussi petite que l'on peut l'imaginer. C'est un nombre réel. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

7.1 Fonction densité de probabilité et fonction de répartition

Dans le cas d'une **variable aléatoire continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'événement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.
On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a \leq X \leq b)$.

Définition 63 Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est dite **absolument continue** et $F(x)$ - **fonction de répartition**, s'il existe une **fonction densité de probabilité** f telle que :

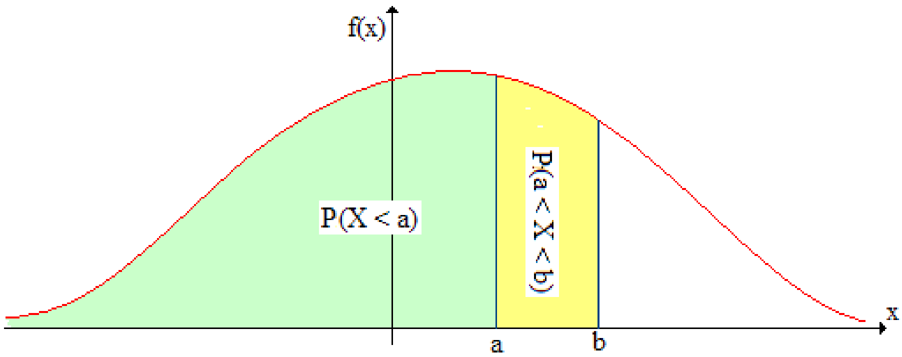
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad P(X < t) = F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Propriétés de la densité de probabilité $f(x)$

$\mathbf{P_1}$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$

$\mathbf{P_2}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Figure 7.1 : Densité de probabilité



$\mathbf{P_3}$: $\forall a \in \mathbb{R} \quad P(X = a) = 0$
La probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur donnée de l'intervalle est nulle. On ne peut donc plus définir de loi de probabilité comme pour les variables aléatoires discrètes. On va utiliser dans ce cas la fonction de répartition de la variable aléatoire.

$\mathbf{P_4}$: Si avec $a < b$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui correspond à l'aire de la surface situé au-dessous de la courbe de densité, à droite de a et à gauche de b.

Remplacer les inégalités stricts par des inégalités larges ne change rien puisque pour une variable aléatoire continue, la probabilité $P(X = a)$ que X prenne exactement la valeur a est nulle.

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b)$$

Remarque : Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies.

Définition 64 **La fonction cumulative de distribution** F, ou plus simplement **fonction de répartition** F d'une v.a. continue X, ayant une densité de probabilité f, est définie par : $F(x) = P(X < x)$,

$$F(x) = \int_{V_{\min}}^{x} f(u)\mathrm{d}u.$$

La fonction de répartition $F(x)$ est la primitive de la fonction de densité $f(x)$, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est $f(x)$.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

D'ici quand Δx tend vers 0, le numérateur $F(x + \Delta x) - F(x)$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 0 - Propriété $\mathbf{P_3}$ de la densité de probabilité.

Propriétés de la fonction de répartition $F(x)$ **:**

$\mathbf{P_1}$: $F(V_{\min}) = 0$ et $F(V_{\max}) = 1$;

$\mathbf{P_2}$: $P(X > x) = 1 - F(x)$ pour tout réel x :;

$\mathbf{P_3}$: F est une fonction continue croissante;

$\mathbf{P_4}$: La probabilité que X appartienne à l'intervalle (x_1, x_2), est égale, par définition, à la différence des valeurs prises par la fonction de répartition aux extrémités de l'intervalle :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

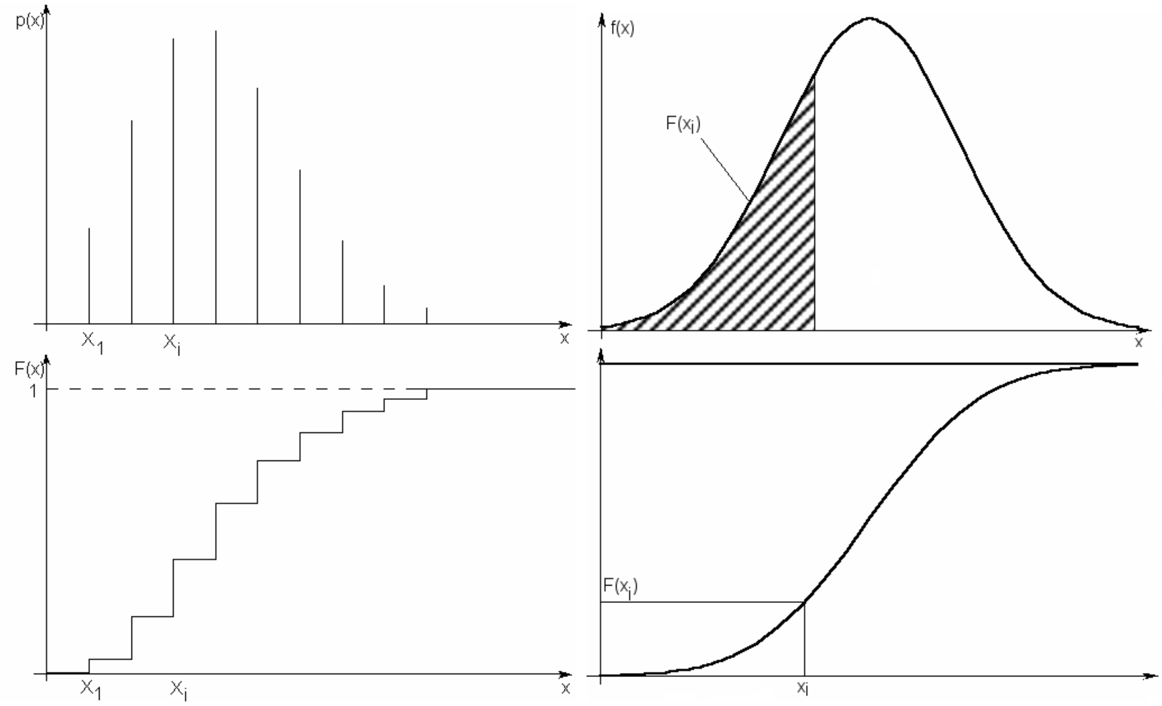
Représentation graphique de la fonction de répartition
La courbe est encore appelée "courbe des probabilités cumulées". Dans le cas d'une loi continue $F(x)$ représente la surface délimitée par la courbe représentation de la loi entre $-\infty$ et l'abscisse x.
La valeur $F(x_1)$ de la fonction de répartition est la somme de toutes les probabilités élémentaires correspondant aux valeurs de X inférieures à x_1. $F(x_1)$ est donc égal à l'aire hachurée comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses, soit symboliquement :

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x.$$

7.1.1 Quantile d'ordre p

Définition 65 Le quantile d'ordre p est la valeur x_p de X telle que $F(x_p) = p$.

FIGURE 7.2 : Lois de probabilité et fonction de répartition (variables discrètes et continues)



Définition 66 Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue et strictement croissante. Pour tout $p \in [0,1]$ nous appelons **quantile d'ordre** p la racine x_p de l'équation en x : $F(x) = p$, tel que

$$P(X \leq x_p) = p \text{ ou encore } F(x_p) = p.$$

On remarque que si F est strictement croissante et continue, la solution existe et elle est unique, donc le quantile est bien défini. Les quantiles sont des valeurs qui divisent une distribution en plusieurs groupes comprenant la même proportion des données. Voici un arbre représentant les quantiles les plus fréquemment utilisés. Voyons maintenant chacune des définitions.

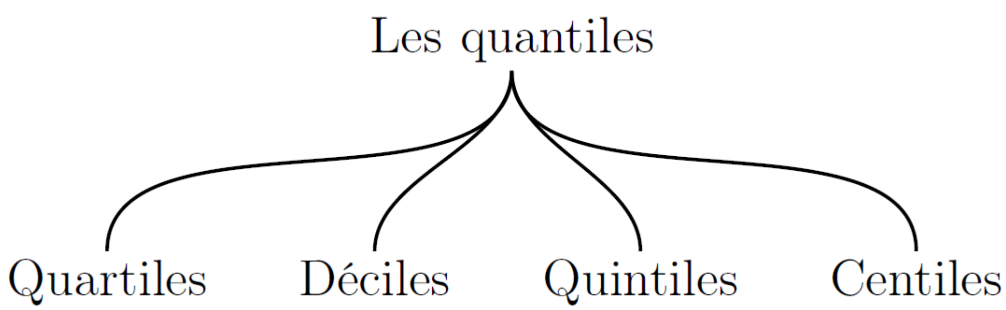


FIGURE 7.3 : Diagramme des différents quantiles

Définition 67 **Les quartiles**. Les quartiles, notés par Q_1, Q_2 et Q_3, divisent une distribution en quatre groupes égaux comprenant chacun 25% des données de la distribution.
On dit que
1) 25% des données sont inférieures à Q_1
2) 50% des données sont inférieures à Q_2
3) 75% des données sont inférieures à Q_3

Définition 68 **Les déciles**. Les déciles, notés par $D_1, D_2, \ldots, D_8$ et D_9, divisent une série statistique ordonnée en dix groupes égaux comprenant chacun 10% des données de la série.
On dit que
1) 10% des données sont inférieures à D_1
2) 20% des données sont inférieures à D_2
3) ...
9) 90% des données sont inférieures à D_9

Définition 69 **Les quintiles**. Les quintiles, notés par V_1, V_2, V_3 et V_4, divisent une série statistique ordonnée en 5 groupes égaux comprenant chacun 20% des données de la série.
On dit que
1) 20% des données sont inférieures à V_1
2) 40% des données sont inférieures à V_2
3) 60% des données sont inférieures à V_3
4) 80% des données sont inférieures à V_4

Définition 70 **Les centiles**. Les centiles, notés par $C_1, C_2, \ldots, C_{98}$ et C_{99}, divisent une série statistique ordonnée en 100 groupes égaux comprenant chacun 1% des données de la série.
On dit que
1) 1% des données sont inférieures à C_1
2) 2% des données sont inférieures à C_2
3) ...
99) 99% des données sont inférieures à C_{99}

Remarque. Pour $p = 1/2$, on parle de **médiane**.

7.1.2 Médiane

La médiane $Me = \eta$ est la valeur η de X pour laquelle $P(X \leq \eta) = P(X \geq \eta) = 1/2$.
Pour une distribution continue c'est la valeur qui sépare la courbe de densité de probabilité en

deux portions de surface égale.

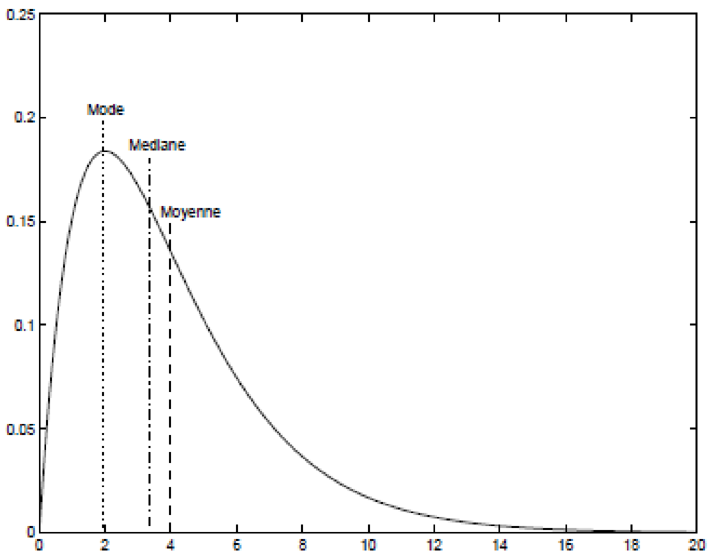
Définition 71 La **médiane** est le quantile d'ordre 1/2.

7.1.3 Mode

Définition 72 **Le mode** x_m *est la valeur de* X *dont la probabilité est maximale.*

Cette valeur peut ne pas être unique. Une distribution unimodale est une distribution n'ayant qu'un seul mode, sinon elle est bimodale, trimodale ou multimodale.

FIGURE 7.4 : Le mode, la médiane et la moyenne d'une loi



7.2 Espérance mathématique et paramètres d'une loi continue

Par analogie avec les v.a. discrètes, on définit en remplaçant la sommation finie $\sum$ par une intégration $\int$ et en remplaçant p_k (probabilité que X prenne la valeur x_k) par $f(x)dx$ (probabilité que X prenne ses valeurs dans un tout petit intervalle dx :

7.2.1 Espérance mathématique (moyenne)

Espérance mathématique (moyenne) d'une variable aléatoire continue

$$E(X) = \int_V x f(x) \mathrm{d}x$$

Exemple 7.2.1 Soit X la variable aléatoire continue uniforme définie sur le segment $(0, 10)$. La densité de probabilité de cette variable est égale à :

$$f(x) = 1/10.$$

En effet :

$$\int_0^{10} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{10} \frac{\mathrm{d}x}{10} = 1.$$

Son espérance mathématique est :

$$\mu = E(X) = \int_0^{10} x \frac{1}{10} \mathrm{d}x = \frac{1}{10} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{10} = 5.$$

Propriétés de l'espérance mathématique

pe1 : Soit a et b deux constantes et X une variable aléatoire :

$$E(aX + b) = aE(X) + b,$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f(x) \mathrm{d}x \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

pe2 : Soit X et Y deux variables aléatoires :

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

L'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances mathématiques.

pe3 : Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** :

$$E(X.Y) = E(X).E(Y).$$

L'espérance mathématique d'un produit de variables aléatoires **indépendantes** est égale au produit des espérances mathématiques.

Vérification : Soit $f(x,y)$ la densité de probabilité du couple de variables aléatoires (X,Y) :

$$E(X.Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Les variables X et Y sont indépendantes :

$$f(x,y) = f(x)f(y).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E(X.Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \times yf(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \times \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

d'où

$$E(X.Y) = E(X) \times E(Y).$$

7.2.2 Variable centrée

Une variable aléatoire X est dite centrée si son espérance mathématique est nulle.

La variable $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée. Son espérance mathématique est nulle.

7.2.3 Variance

La variance est l'espérance du carré de la variable centrée.

$$\sigma^2 = \int_V (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = E(X^2) - E(X)^2.$$

Propriétés de la variance

pv1 : Soit a et b deux constantes et X une variable aléatoire :

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

En effet :

$$Var(aX+b) = E((aX+b-E(aX+b))^2).$$

Or, d'après les propriétés de l'espérance mathématique :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

d'où :

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E(a^2(X-E(X))^2) \\ &= a^2E((X-E(X))^2) = a^2Var(X). \end{aligned}$$

pv2 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y).$$

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances.

En effet, par définition :

$$Var(X+Y) = E([X+Y-E(X+Y)]^2)$$

et, par suite des propriétés de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &+ E([(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2) \\ &= E((X-E(X))^2) + E((Y-E(Y))^2) \\ &\quad +2E((X-E(X))(Y-E(Y))). \end{aligned}$$

L'expression $E((X-E(X))(Y-E(Y)))$, que l'on appelle la covariance de X et de Y, est nulle lorsque les variables X et Y sont indépendantes.

Par conséquent :

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Les propriétés d'additivité ne s'appliquent qu'aux variances ; Elles ne s'appliquent pas aux écart-types. (une somme $\sigma(X) + \sigma(Y)$ n'a aucun sens statistique)

7.2.4 Variable réduite

Une variable aléatoire X est dite réduite si son écart-type est égal à 1.

La variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$ admet une variance de 1 et est appelée variable réduite.

7.2.5 Variable centrée réduite ou standardisée

Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée (ou variable normalisée).

A n'importe quelle variable aléatoire X, on peut associer la variable standardisée

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

En divisant la variable centrée par son écart-type, une valeur située à un écart-type de la moyenne sera ramenée à 1, une autre située à deux écarts-types sera ramenée à 2 : l'échelle de référence, ou unité de mesure, d'une variable centrée-réduite est l'écart-type.
Les valeurs des variables centrées-réduites sont complètement indépendantes des unités de départ. Une mesure exprimée en mètres ou en centimètres donne exactement la même variable centrée-réduite. On peut ainsi faire des comparaisons entre variables de natures différentes. Si un enfant est à +3 écarts-types de la moyenne pour sa taille et +1 écart-type pour son poids, on sait qu'il est plus remarquable par sa taille que par son poids. L'examen des variables centrées-réduites est très pratique pour déceler les valeurs "anormalement" grandes ou "anormalement" petites.

Pourquoi centrer et réduire ? Lorsqu'on passe de X à Z, on obtient une variable aléatoire dont les paramètres (espérance et variance) ne dépendent plus de ceux de X.

Le passage d'une variable aléatoire X à une variable standardisée est requis pour l'utilisation de certaines tables de probabilité. C'est le cas pour l'utilisation de la table de la loi normale.

7.2.6 Moment d'ordre supérieur

On appelle **moment d'ordre** k la grandeur :

$$m_k = E(X^k).$$

Le **moment centré d'ordre** k est le moment d'ordre k de la variable centrée :

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k].$$

On a donc

$$m_1 = E(X), \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = Var(X).$$

Tous les moments centrés d'ordre impair (> 1) donnent une indication sur la dissymétrie de la loi de probabilité, mais on n'utilise que le moment d'ordre 3 :

Coefficient d'asymétrie :

$$\beta = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Le coefficient d'asymétrie est une grandeur sans dimension, sa valeur donne une idée de l'importance de la dissymétrie et son signe montre si la dissymétrie provient de valeurs élevées de X (dissymétrie à droite) ou des valeurs petites de X (dissymétrie à gauche).
Tous les moments centrés d'ordre pair sont des variables de dispersion. On n'utilise que le moment μ_4.

Coefficient de Kurtosis ou **aplatissement** comparé à la loi Normale :

$$\delta = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Ce facteur est également sans dimension et permet donc de montrer qu'une distribution est plus aplatie ou moins aplatie qu'une distribution gaussienne, toutes choses égales par ailleurs (même espérance et même variance).

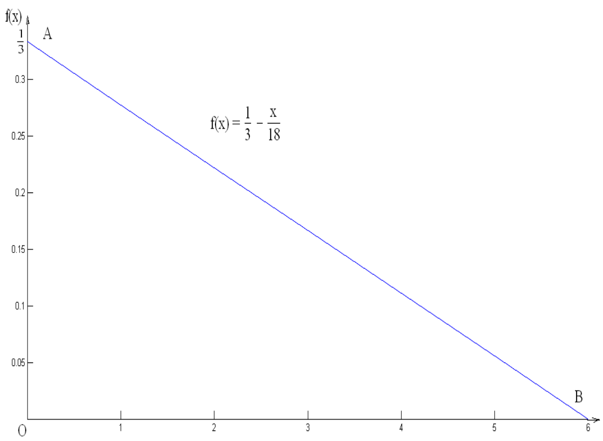
Exemple 7.2.6.1 [11] Une variable aléatoire continue a une densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{18}$. Son intervalle de définition est $[0, 6]$.

1. Vérifier par le calcul et graphiquement que, dans cet intervalle, la somme des probabilités des valeurs de cette variable aléatoire continue est bien égale à 1.
2. Représenter graphiquement les variations de la fonction de répartition dans cet intervalle.
3. Calculer $E(x)$.
4. Calculer $Var(x)$ et $\sigma(x)$.

Solution :

1. La somme des probabilités des valeurs de cette variable aléatoire continue dans l'intervalle est

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^6 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{18}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{3} - \frac{x^2}{36}\right]\Bigg|_0^6 = \frac{6}{3} - \frac{36}{36} = 2 - 1 = 1.$$

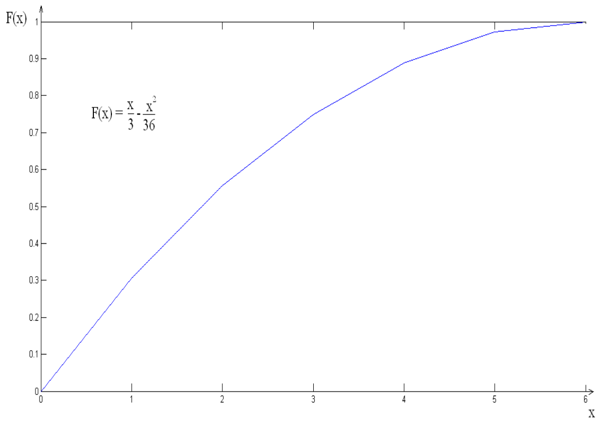


Pour que $f(x)$ représente la loi de probabilité de la variable aléatoire continue sur l'intervalle $[0, 6]$, il faut que l'aire se situant sous la courbe et entre les axes des abscisses et ordonnées soit égale à 1. Cette aire est celle du triangle AOB qui a une surface

$$S_{AOB} = \frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2} = \frac{6 \times 1/3}{2} = 1.$$

2. La fonction de répartition $F(x)$ est la primitive de $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{x}{18}$.

$$F(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{18}\frac{x^2}{2} = \frac{x}{18} - \frac{x^2}{36}.$$



3. $$E(x) = \int_0^6 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^6 x\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{18}\right)\mathrm{d}x = \int_0^6 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{18}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{54}\right]\Big|_0^6 = \frac{36}{6} - \frac{216}{54}$$
$$= 6 - 4 = 2.$$

4. $$Var(x) = \textstyle\int_0^6 x^2 f(x)\mathrm{d}x - E(x)^2 = \displaystyle\int_0^6 x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{18}\right)\mathrm{d}x - 4$$
$$= \int_0^6 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{18}\right)\mathrm{d}x - 4$$
$$= \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{72}\right]_0^6 - 4 = \frac{216}{9} - \frac{1296}{72} - 4 = 2.$$

$\sigma(x) = \sqrt{2} = 1.414$

Exemple 7.2.6.2 On suppose que la durée de vie d'un individu est une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité f est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} kt^2(100-t)^2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 100 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez k pour que f soit effectivement une densité de probabilité
   Solution :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \iff \int_0^{100} kt^2(100-t)^2 dt = 1$$

$$\int_0^{100}(t^4 - 2.10^2t^3 + 10^4t^2)dt = \frac{1}{k}$$
$$\left[\frac{t^5}{5} - 10^2\frac{t^4}{2} + 10^4\frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_0^{100} = \frac{1}{k}$$
$$\frac{10^{10}}{5} - \frac{10^{10}}{2} + \frac{10^{10}}{3} = \frac{1}{k}$$
$$\frac{10^{10}}{30} = \frac{1}{k} \Longleftrightarrow k = \frac{3}{10^9}$$

2. Calculez l'espérance mathématique de la durée de vie d'un individu, puis l'écart-type.
   Solution :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{100} kt^3(100-t)^2dt \\
&= k\left(\frac{t^6}{6} - 2.10^2\frac{t^5}{5} + 10^4\frac{t^4}{4}\right]\Bigg|_0^{100} \\
&= k\left(\frac{10^{12}}{6} - 2\frac{10^{12}}{5} + \frac{10^{12}}{4}\right) \\
&= \frac{3}{10^9}\frac{10^{12}}{60} = 50.
\end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{100} kt^4(100-t)^2dt \\
&= k\left[\frac{t^7}{7} - 2.10^2\frac{t^6}{6} + 10^4\frac{t^5}{5}\right]\Bigg|_0^{100} \\
&= k\left(\frac{10^{14}}{7} - 2\frac{10^{14}}{6} + \frac{10^{14}}{5}\right) = \frac{3}{10^9}\frac{10^{14}}{105} = 3\frac{10^5}{105}.
\end{aligned}$$

   Il s'ensuit que $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = 10\sqrt{\frac{25}{7}}$.

3. Calculez la probabilité pour qu'un individu meure entre 30 et 60 ans
   Solution :

$$\begin{aligned}
P(30 \leq X \leq 60) &= \int_{30}^{60} \frac{3}{10^9}t^2(100-t)^2dt \\
&= \frac{3}{10^9}\left[\frac{t^5}{5} - 10^2\frac{t^4}{2} + 10^4\frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_{30}^{60} \\
&= \frac{3}{10^5}(15066 - 60750 + 63000) \\
&= \frac{51948}{10^5} = 0.51948 = 51.948\%.
\end{aligned}$$

Test sur le chapitre : Variable aléatoire continue (à densité)

1. Donner la définition d'une variable aléatoire continue.
2. Comment on définit la probabilité d'un événement de type $[a, b]$?
3. Exprimez la probabilité que la variable aléatoire à densité X prenne la valeur x dans l'intervalle $[a, b]$?
4. Quelles conditions doit vérifier une fonction f pour être densité de probabilité d'une variable aléatoire continue ?
5. Quel est le lien entre densité et fonction de répartition ?
6. Connaissant la fonction de répartition F de X, comment calculer $P(a < X < b)$?
7. Quelles formules permettent de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f ?

Chapitre 8

Lois (Distributions) de probabilité continues particulières

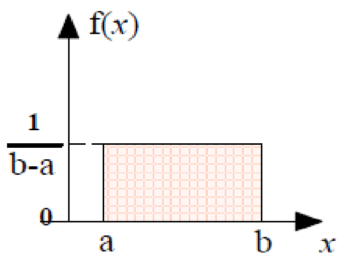
8.1 Distribution uniforme continue $X \sim \mathcal{U}[a; b]$

Cette loi est l'analogue continu de l'équiprobabilité dans le cas discret. Elle permet de modéliser le tirage d'un nombre aléatoire dans l'intervalle $[a, b]$. Un exemple de distribution uniforme continue est le temps d'attente de l'autobus à une station et toute les variables aléatoires dont les valeurs sont équiprobables et situées dans un intervalle.

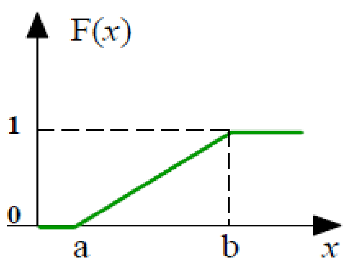
> **Définition 73** On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme continue sur un intervalle $[a, b]$, si elle admet une fonction de densité de probabilité constante sur cet intervalle et nulle ailleurs.

Notation : $X \sim \mathcal{U}[a; b]$

Densité de probabilité



Fonction de densité de probabilité



Fonction de répartition

La loi uniforme continue étant une loi de probabilité, l'aire hachurée en rouge sur la figure ci-dessus vaut 1. Ceci implique que la valeur prise par $f(x)$ vaut $\frac{1}{b-a}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est définie par la connaissance de $[a,b]$.

Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Vérification En utilisant la définition de la fonction de répartition, on a :

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{si } x \leq a, \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \\ \text{si } a \leq x \leq b, \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a} \\ \text{si } x \geq b, \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1 \end{aligned}$$

Paramètres descriptifs Une distribution uniforme n'a pas de mode.
Sa médiane M_e est définie par $F(M_e) = \frac{1}{2} = \frac{M_e - a}{b-a} \Longrightarrow M_e = \frac{a+b}{2}$.

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}; \quad Var(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Vérification

- Espérance

$$E(X) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} tdt = \frac{1}{b-a} \left. \frac{t^2}{2} \right|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

- Variance

$$Var(X) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} (t - E(X))^2 \, dt = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 8.1.1 Soit X une variable aléatoire continue uniforme définie sur le segment $[1,4]$, c.-à-d. $X \sim \mathcal{U}[1;4]$. La densité de probabilité de cette variable aléatoire est égale à :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}, & \text{si } x \in [1,4] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-1}{3} & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ 1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Les paramètres sont : $M_e = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$; $E(X) = \frac{a+b}{2} = 2.5$; $Var(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$.

Exemple 8.1.2 Pierre attend à la maison le technicien pour le TV qui doit venir entre 10 et 18 heures. Pierre a attendu jusqu'au 14 heures et il est sorti pour une heure. Trouver la probabilité pour que le technicien ne trouve pas Pierre à la maison.
Solution :
De l'énoncé on accepte que le temps d'arrivée du technicien chez Pierre est une variable aléatoire uniforme continue $X \sim \mathcal{U}[14;18]$. La probabilité de ne pas trouver Pierre à la maison est

$$P(14 < X < 15) = F(15) - F(14) = \frac{15-14}{18-14} - \frac{14-14}{18-14} = \frac{1}{4}.$$

8.2 Distribution normale (dite de Laplace - Gauss) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Situation concrète : On rencontre souvent des phénomènes complexes qui sont le résultat de causes nombreuses, d'effet faible, et plus ou moins indépendantes. Un exemple typique est celui de l'erreur commise sur la mesure d'une grandeur physique. Cette erreur résulte d'un grand nombre de facteurs tels que : variations incontrôlables de la température ou de la pression, turbulence atmosphérique, vibrations de l'appareil de mesure, etc... Chacun des facteurs a un effet faible, mais l'erreur résultante peut ne pas être négligeable. Deux mesures faites dans des conditions que l'expérimentateur considère comme identiques pourront alors donner des résultats différents.

Donc dès que nous serons dans **une situation où la distribution dépend d'un *grand nombre* de causes *indépendantes*, dont les effets *s'additionnent* et dont aucune n'est *prépondérante*, alors nous serons en présence de la distribution normale.**

C'est le cas, par exemple : erreurs de mesure, diamètres de pièces fabriquée en série, durées d'un trajet, fluctuation accidentelles d'une grandeur économique (production, ventes, etc.) autour de sa tendance, la distribution des erreurs d'observation et la distribution de phénomènes aléatoires tels que la température et la pression en météorologie, la distribution de caractères biométriques comme la taille ou le poids d'individus appartenant à une population homogène en biologie...

Distribution de probabilité

Définition 74 Une v.a. X suit une loi normale si elle admet pour fonction de densité de probabilité une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, μ un paramètre réel et σ un paramètre réel strictement positif.

On verra plus tard que μ est égal à l'espérance mathématique (ou moyenne) et σ à l'écart-type de la distribution. La loi normale est donc entièrement définie par sa moyenne μ et son écart-type σ appelés paramètres de la loi normale.
On démontre que f est bien une fonction de densité de probabilité car $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Pour le démontrer on utilise que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$ (c'est l'intégrale de Gauss).
La loi normale étant tabulée, cette expression nous sera de peu d'utilité.

Notation : Deux manières différentes suivant les auteurs : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dans ce manuel on va utiliser la notation $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

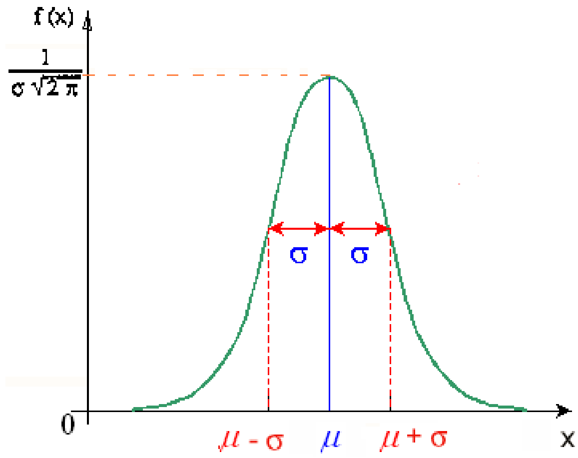
Fonction de répartition :

Définition 75 La fonction de répartition, qui représente la probabilité que la variable aléatoire X ait une valeur inférieure à x, a pour expression :

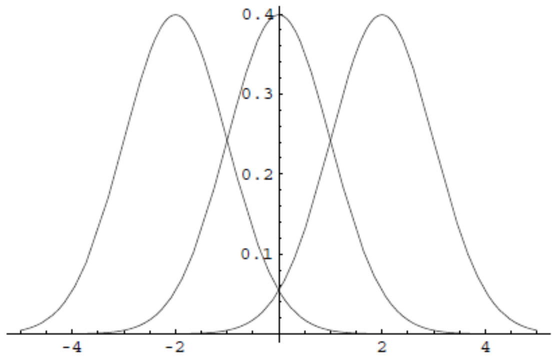
$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt.$$

La loi normale dépendant de deux paramètres, on pourrait penser que les tables de cette loi sont à triple entrée (μ, σ et x) et, par conséquent, comme celle de la loi binômiale, fort volumineuses et d'usage peu commode. Fort heureusement, il n'en est rien : de la connaissance de la loi pour une valeur déterminée de μ et de σ, on peut déduire de façon très simple les distributions de probabilité correspondant à n'importe quelle autre valeur de μ et de σ.

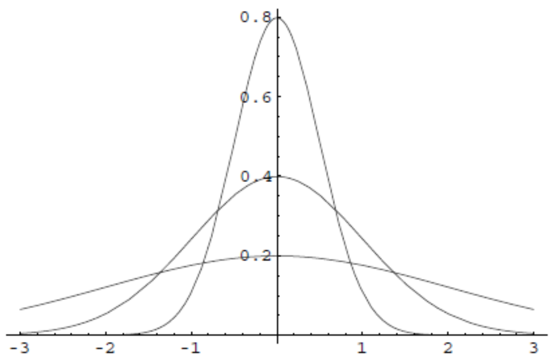
Forme La courbe de densité de probabilité de la loi de Laplace-Gauss se présente comme une courbe symétrique à un seul mode $x = \mu$. La courbe admet deux points d'inflexion ayant pour abscisse respectivement $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$, ses branches extrêmes se raccordant tangentiellement à l'axe des abscisses. Cette forme particulière lui a valu la dénomination de "courbe en cloche" ou "courbe de Gauss".



En fait il ne s'agit pas d'une courbe unique mais plutôt d'une famille de courbes dépendant de μ et σ.

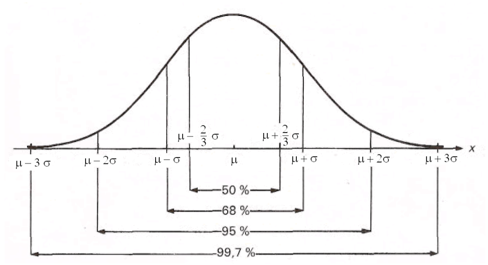


Ecarts types identiques, espérances -2, 0, 2 différentes

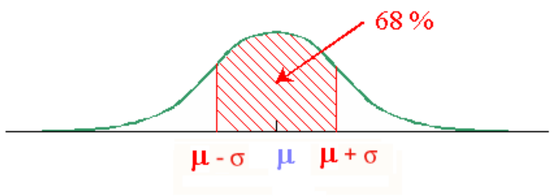


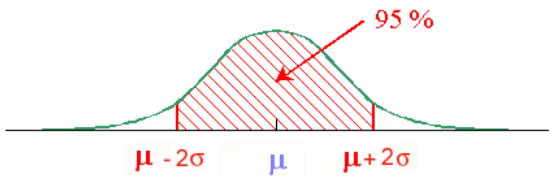
Espérances identiques, écarts types 0.5, 1, 2 différents

Les intervalles "Un, deux, trois sigma" Les observations sont groupées autour de la moyenne :

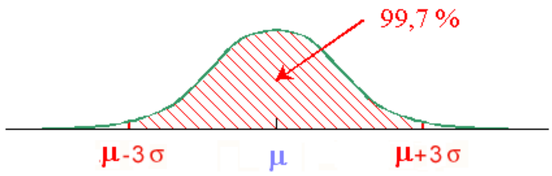


50 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \frac{2}{3}\sigma, \mu + \frac{2}{3}\sigma)$,
68 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$,
95 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$,
99,7 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.





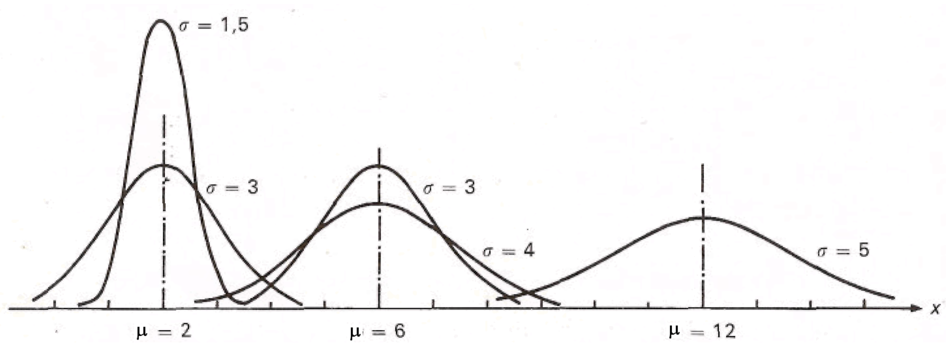
Une variable normale a "95 chances sur 100 d'être située entre : moyenne moins 2 écarts-types et moyenne plus 2 écarts-types" (la vraie valeur n'est pas 2 mais 1,96)



Une variable normale est presque certainement située entre : moyenne moins 3 écarts-types et moyenne plus 3 écarts-types.

En pratique, la quasi-totalité des unités sont donc rassemblées dans un intervalle de six écarts-types autour de la moyenne.

La valeur de la moyenne détermine la position de la courbe : des courbes de même écart-type se déduisent par translation. Suivant la valeur de l'écart-type, la distribution est plus ou moins dispersée.

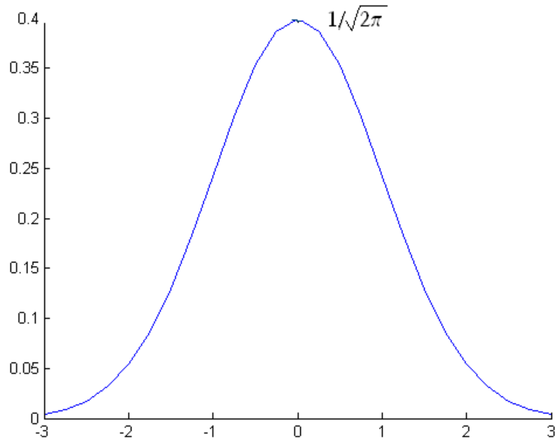


Courbes de densité de probabilité de la variable normale suivant les valeurs des paramètres μ et σ

Par le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

toutes ces courbes se réduisent à la courbe représentative de la variable normale centrée réduite Z.



Forme de la loi normale : courbe de densité
de la variable normale centrée réduite

8.2.1 Caractéristiques de la loi normale

Mode. Du fait de la symétrie de la courbe de densité le mode est égal à la moyenne μ.

Espérance mathématique. L'espérance mathématique (ou moyenne) de la loi normale est égale à μ :

$$E(X) = \mu.$$

Le paramètre μ de la loi normale a donc une signification particulière : c'est la moyenne de la distribution.

Variance. La variance de la loi normale est égale à σ^2 :

$$Var(X) = \sigma^2.$$

Ecart-type. L'écart-type de la loi normale est égal à σ :

$$\sigma(X) = \sigma.$$

8.2.2 Probabilité attachée à un intervalle

La fonction de répartition d'une variable normale de paramètres (μ, σ) peut toujours s'exprimer à l'aide de la fonction de répartition $F(t) = \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{x^2}{2}} dx$ dite fonction de Laplace ou fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. (Voir Table 6. à l'Annexe.) :

$$P(X < x) = \pi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Pour tout intervalle de bornes (a, b), éventuellement infinies, on a :

$$P(a < X < b) = \pi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \pi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Les valeurs $\pi(t)$ de la fonction de répartition π de la variable normale centrée réduite se lisent dans la table pour t :

Table de la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite

$t = 0.52$

$\pi(0.52) = 0.6985$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

Pour $t < 0$, on applique la formule de symétrie

$$\pi(t) = 1 - \pi(-t)$$

en lisant $\pi(-t)$ dans la table :

$$\pi(-0,52) = 1 - \pi(0,52) = 1 - 0,6985 = 0,3015$$

Valeurs souvent utilisées (les seules à connaître, en pratique) :

$\pi(1,645) = 0,9500$, qui sert dans les tests unilatéraux à 5 %

. $\pi(1,96) = 0,9750$, qui sert dans les tests bilatéraux à 5 %.

8.2.3 Propriétés de la loi normale

On peut effectuer quelques remarques à propos de la loi normale.

1. La distribution est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$. Donc l'aire sous la courbe de part et d'autre de cette droite est égale à 0.5.

2. La distribution est d'autant plus étalée que σ est grand.

3. L'axe des abscisses est une asymptote et l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ est négligeable : $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$. Dans la pratique, si on reçoit des valeurs hors de cet intervalle, on peut les considérer comme des erreurs. Ces observations doivent être répétées.

4. σ représente la différence des abscisses entre le sommet de la courbe et le point d'inflexion.

5. La longueur à mi-hauteur de la courbe (L.M.H. ou en anglais F.W.H.M. Full Width Half Maximum) vaut 2.35σ. Cette distance est souvent employée par le spectroscopiste pour déterminer expérimentalement σ. Cette méthode doit cependant être utilisée avec précaution car il faut s'assurer que les "bruits" permettent d'observer correctement le "pied" de la courbe.

8.2.4 Stabilité de la loi normale

Théorème 10 Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes. Si X_1 suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et X_2 suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

8.3 Distribution normale centré réduite ou loi normale standardisée $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

A toute variable aléatoire X, on peut associer une variable dite standardisée $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ d'espérance nulle et de variance unité (ceci résultait des propriétés de translation et de changement d'échelle). On montre assez facilement que si on effectue cette transformation sur une variable suivant une loi normale, la variable standardisée suit encore une loi normale mais cette fois-ci de paramètres 0 et 1. La loi standardisée est appelée loi normale centrée réduite, et notée $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc si X suit $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ et Z suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

On peut résumer la correspondance de la façcon suivante :

$$\begin{array}{lcl} X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma) & & Z \to \mathcal{N}(0, 1) \\ E(X) = \mu & Z = \frac{X-\mu}{\sigma} & E(Z) = 0 \\ Var(X) = \sigma^2 & & Var(Z) = 1 \end{array}$$

Il faut garder à l'esprit que concrètement Z est le nombre d'écarts-type entre la valeur de X et la moyenne.

Définition 76 On appelle loi normale centré réduite, la distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à 1.

8.3.1 Notation : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

8.3.2 Fonction de densité de Z :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. La fonction : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ est paire, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{f(-t) = f(t).}$$

   La courbe de densité de probabilité est donc symétrique par rapport à la droite d'abscisse $t = 0$.

2. En raison de la symétrie $f(t)$ est maximum pour $t = 0$. On vérifie que la dérivée

$$f'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t\, e^{-t^2/2},$$

   s'annule pour $t = 0$ (ainsi que pour $t \to \pm\infty$),

3. La courbe de densité de probabilité a deux points d'inflexion pour $t = -1$ et $t = +1$.

   La variable normale de moyenne μ et d'écart-type σ, qui se déduit de la variable centrée réduite par la transformation linéaire :

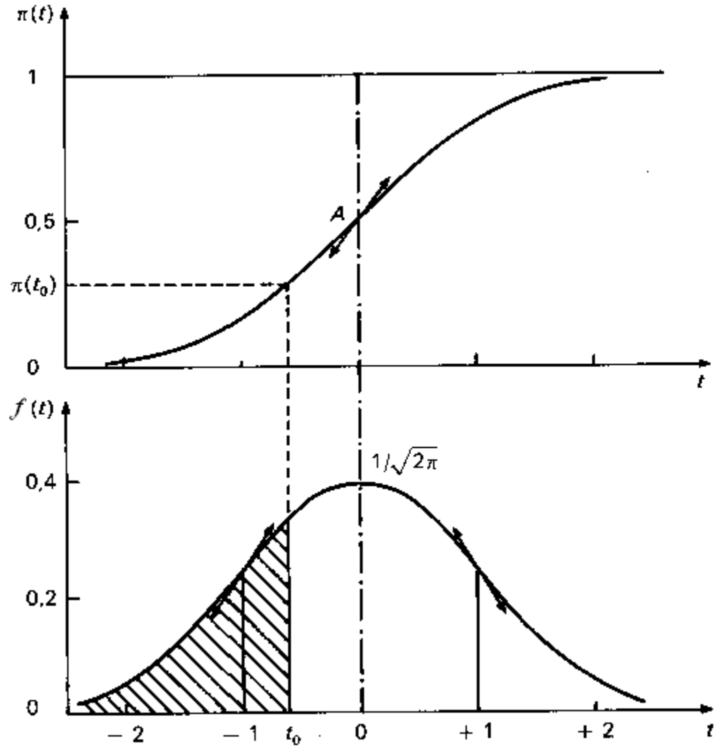
$$x = \sigma\, t + \mu,$$

   a une courbe de densité de probabilité symétrique par rapport à μ $(t = 0)$ et deux points d'inflexion pour $x = \mu - \sigma$ $(t = -1)$ et $x = \mu + \sigma$ $(t = +1)$.

8.3.3 Fonction de répartition de Z :

On appelle **fonction** π, la fonction de répartition d'une variable normale réduite Z telle que :

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & t \to \pi(t) = F(t) = P(Z < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$



[12]

La fonction de répartition $\pi(t)$ est représentée par la courbe cumulative. Le point d'inflexion A de celle-ci, comme celui de toute courbe cumulative, correspond au maximum de la courbe de densité de probabilité, c'est-à-dire au mode de la distribution. La valeur $\pi(t_0)$ de la fonction de répartition étant la somme de toutes les probabilités élémentaires correspondant aux valeurs de Z inférieures à t_0, est égale à l'aire hachurée comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses.
En raison de la symétrie de la fonction de densité, si t est un réel strictement positif, alors :

$$\boldsymbol{\pi(-t) = 1 - \pi(t),}$$

la courbe cumulative est symétrique par rapport au point d'inflexion $A(0; 0.5)$.
La fonction π est tabulée.

8.3.4 Paramètres descriptifs

$$E(Z) = 0, \quad Var(Z) = 1, \quad \sigma = 1.$$

Mode et Médiane Le Mode M_o, la médiane M_e et la moyenne μ d'une variable aléatoire continue normale centrée réduite coïncident : $M_o = M_e = \mu = 0$.

Quantile : Le quantile t_p, $(0 < p < 1)$ est la valeur de Z telle que $\pi(t_p) = p$.
Les quantiles d'une variable aléatoire sont les valeurs qui prend la variable pour des valeurs de probabilité sous le quantile considéré.

Quartile : En Statistique descriptive, un quartile est chacune des 3 valeurs qui divisent les données en 4 parts égales, de sorte que chaque partie représente 1/4 de l'échantillon de population.
Calcul des quartiles :
- le 1^{er} quartile sépare les 25% inférieurs des données ;
- le 2^{e} quartile est la médiane de la série ;
- le 3^{e} quartile sépare les 25% supérieurs des données ;

La différence entre le 3^{e} quartile et le 1^{er} quartile s'appelle **écart interquartile**, c'est un critère de la dispersion de la série.

8.3.5 Probabilité d'intervalles

Intervalle du type $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
A l'aide des valeurs dans la table nous pouvons calculer la probabilité d'un événement du type : $a \leq Z \leq b$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \in [a, b]) = \pi(b) - \pi(a)$$

Intervalle du type $[-\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]$

$$P(-t \leq Z \leq t) = 2P(0 \leq Z \leq t) = 2(\pi(t) - 0,5)$$

Vérification

$$\begin{aligned} P(-t \leq X \leq t) &= F(t) - F(-t) = \pi(t) - \pi(-t) \quad \text{mais comme } \pi(-t) = 1 - \pi(t) \\ &= \pi(t) - (1 - \pi(t)) = 2\pi(t) - 1 = 2(\pi(t) - 0.5). \end{aligned}$$

8.3.6 Intervalles remarquables :

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 1) &= 0,683 \\ P(-2 \leq Z \leq 2) &= 0,954 \\ P(-3 \leq Z \leq 3) &= 0,997 \end{aligned}$$

8.3.7 Intervalle centré en 0 de probabilité donnée

Soit α un niveau de probabilité $(0 < \alpha < 1)$.
Recherchons l'intervalle $[-t, t]$ centré en 0 tel que $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$.
Comme $P(-t < Z < t) = 2\pi(t) - 1$, pour $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$ on obtient $2\pi(t) - 1 = 1 - \alpha$ $\Longrightarrow \pi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. A l'aide des tables nous pouvons déterminer $Z = t_\alpha$ tel que $\pi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

8.3.8 Cas particuliers :

α	$Z \sim \mathcal{N}(0.1)$	$1-\frac{\alpha}{2}$
0.20	$P(-1.282 < Z < 1.282) = 0.80$	0.9
0.10	$P(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$	0.95
0.05	$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$	0.975
0.01	$P(-2.576 < Z < 2.576) = 0.99$	0.995

Donc, on peut mentionner deux valeurs très utiles qu'il faut connaître :

$$t_{0.05} \approx 1.96, \quad \text{et} \quad t_{0.01} \approx 2.58 \ \ (\text{ à } 10^2 \text{ près})$$

$t_{0.05}$ est le réel pour lequel $P(-t_{0.05} \leq Z \leq t_{0.05}) = 0.95$ et on a donc : $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$ de même, $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) \approx 0.99$. Cela donne une idée de la répartition des valeurs de Z. Environ 95% des réalisations de Z se trouvent entre -1.96 et +1.96.

8.3.9 Lien entre la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ et la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, on peut passer de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ à la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et inversement en posant $\boldsymbol{Z = (X-\mu)/\sigma}$, ce qui entraîne $\boldsymbol{X = \sigma Z + \mu}$.
Cela revient à changer d'origine et d'unité.

Les lois gaussiennes quelconques ne sont pas dans les tables car un calcul relatif à une telle loi se ramène à un calcul relatif à la loi gaussienne réduite.

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est tabulée à l'aide de la fonction de répartition des valeurs positives. Elle donne les valeurs de $\pi(t) = P(0 \leq Z \leq t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$ pour $t > 0$. Ce nombre représente l'aire sous la courbe représentative de la distribution et au dessus de l'intervalle $[0,t]$. Pour cette raison la table de la loi normale est aussi appelée table d'aires. Cette table ne dépend d'aucun paramètre, mais permet cependant de déterminer les probabilités de n'importe quelle distribution normale !

On a par exemple pour $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$:

$$P(X \leq x) = P(\sigma Z + \mu \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{8.1}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned} P(|X| \leq x) &= P(-x \leq X \leq x) = P(-x \leq \sigma Z + \mu \leq x) \\ &= P\left(-\frac{x+\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \pi\left(-\frac{x+\mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{8.2}$$

On utilise souvent la propriété énoncée en 8.2.4 Stabilité de la loi normale.

8.3.10 Détermination pratique des probabilités : usage des tables de la loi normale

Par le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

toutes les distributions normales se ramènent à une seule : celle de la variable normale centrée réduite Z. C'est pour celle-ci que les fonctions de densité de probabilité et de répartition ont été calculées et font l'objet de tables que l'on trouvera en annexe.

A. Table de la densité de probabilité $f(t)$ - Table 5. à l'Annexe

1. Description

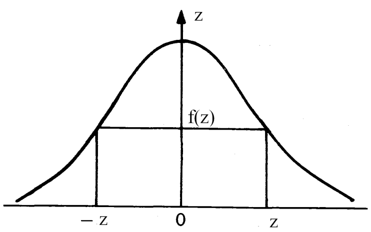
Cette table donne la densité de probabilité $f(t)$ correspondant aux valeurs positives de la variable normale centrée réduite variant de dixième en dixième : $t = 0.0; 0.1; \ldots; 3.9$. Les unités se lisent en ligne et les dixièmes en colonne (annexe : Table 5.)

Exemple 8.3.10.1 Pour $t = 1.3$ la densité de probabilité est : $f(1.3) = 0.1714$.

t	0	1	2	3	4	
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	$\boxed{0{,}171\ 4}$	0,149 7	0
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0
3,	0,004 4	0,003 3	0,002 4	0,001 7	0,001 2	0

Valeurs de t négatives

En raison de la symétrie de la courbe de densité, la table permet de déterminer les densités correspondant à des valeurs négatives de t :



$$f(-t) = f(t).$$

Exemple 8.3.10.2 Pour $t = -2.8$, la densité de probabilité est :

$$f(-2.8) = f(2.8) = 0.0079.$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1	0,333 2	0,312 3	0,289 7
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5	0,110 9	0,094 0	0,079 0
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5	0,013 6	0,010 4	0,007 9

La loi normale étant une distribution continue, les densités correspondant à des valeurs de t intermédiaires de celles figurant dans la table sont obtenues par interpolation linéaire.

Exemple 8.3.10.3 Pour $t = 1.36$, la densité de probabilité sera évaluée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(1.3) &= 0.1714; \\ f(1.4) &= 0.1497; \\ f(1.36) &= f(1.3) - \frac{(f(1.3) - f(1.4)) * 6}{10} = 0.1714 - \frac{(0.1714 - 0.1497) * 6}{10} = 0.1584. \end{aligned}$$

t	0	1	2	3	4	5
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5

2. Utilisation

Le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

permet de déterminer à l'aide de la table, la densité de probabilité correspondant à une valeur quelconque de la variable normale X de moyenne μ et d'écart-type σ.

Pour $X = x$, la densité de probabilité est, en effet :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

alors que celle de la valeur correspondante de la variable normale centrée réduite est :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Il existe donc entre les densités de probabilité de x et de t la relation :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{f(t)}{\sigma}.}$$

Exemple 8.3.10.4 Soit X une variable normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$. Recherchons la densité de probabilité pour $X = 8$ et $X = 4.52$.

Pour $X = 8$, la variable normale centrée réduite a pour valeur :

$$t = (8 - 5)/2 = 1.5.$$

Par consultation de la Table 5. :

t	0	1	2	3	4	5
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5

$$f(t) = f(1.5) = 0.1295$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(t)}{\sigma} \\ f(8) &= \frac{0.1295}{2} = 0.0648. \end{aligned}$$

Pour $X = 4.52$:

$$\begin{aligned} t &= (4.52 - 5)/2 = -0,24, \\ f(t) &= f(-0.24) = f(0.24). \end{aligned}$$

Par interpolation linéaire :

t	0	1	2	3	4
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4

$$f(0.20) = 0.3910$$
$$f(0.30) = 0.3814$$
$$f(0.24) = 0.3910 - \frac{(0.3910 - 0.3814)4}{10} = 0.3872,$$

d'où :

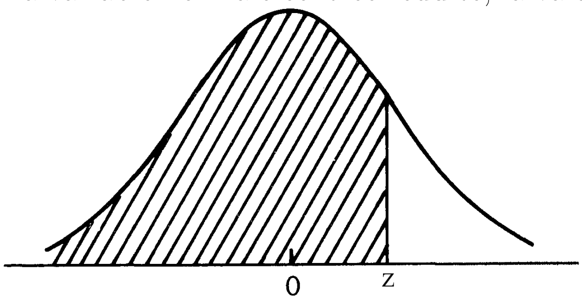
$$f(4.52) = \frac{0.3872}{2} = 0.1936.$$

B. Table de la fonction de répartition $\pi(t)$ - Table 6. à l'Annexe

1. Description

Cette table donne, pour toute valeur positive t de la variable normale centrée réduite, la valeur correspondante de la fonction de répartition $\pi(t)$, représentée par l'aire hachurée, qui est égale à la probabilité pour que Z soit inférieur à t :

$$\boldsymbol{\pi(t) = P(Z < t).}$$



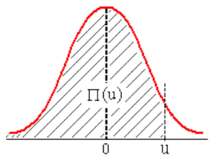
Les valeurs de t varient de centième en centième : $z = 0.00; 0.01; 0.02; \ldots$ Les unités et les dixièmes se lisent en ligne ; les centièmes en colonne (annexe : Table 6.)

- **Probabilité pour que Z soit inférieur à t**

Exemple 8.3.10.5 La probabilité pour que Z soit inférieur à 1.32 est :

Table de Loi Normale

Fonction de répartition Π de la loi normale centrée réduite : U $\rightarrow$ N(0 . 1).
Probabilité de trouver une valeur inférieure à u.
Π (u) = P(U $\leq$ u) ; Π (-u) = P(U $\leq$ - u) = 1 - Π (u)



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	**0.89617**	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189

Exemple : Π (1.26) = P(U $\leq$ 1.26) = 0.89617 = 89.62%

$$P(Z < 1.32) = \pi(1.32) = 0.9066.$$

- **Probabilité pour que Z soit supérieur à t**

L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses représente la somme des probabilités de la loi normale et est égale à 1. On a donc :

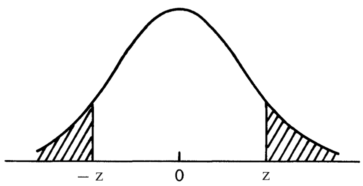
$$\boldsymbol{P(Z \geq t) = 1 - P(Z < t) = 1 - \pi(t).}$$

Exemple 8.3.10.6 La probabilité pour que Z soit supérieur ou égal à 0.28 est :

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409

$$P(Z \geq 0.28) = 1 - \pi(0.28) = 1 - 0.6103 = 0.3897.$$

- **Valeurs de t négatives**



En raison de la symétrie de la courbe, la table permet de déterminer la fonction de répartition pour les valeurs négatives de t :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P(Z < -t)} &= \boldsymbol{P(Z \geq t) = 1 - P(Z < t)}, \\ \boldsymbol{\pi(-t)} &= \boldsymbol{1 - \pi(t)}. \end{aligned}$$

Exemple 8.3.10.7 La probabilité pour que Z soit inférieur à —0.77 est :

u	0.00		0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000C	4	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.6	0.7257	5	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	7	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	1	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327

$$P(Z < -0.77) = \pi(-0.77) = 1 - \pi(0.77) = 1 - 0.7794 = 0.2206.$$

2. Utilisation

Le changement de variable :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

permet de déterminer à l'aide de la table la probabilité pour qu'une variable normale X de moyenne μ et d'écart-type σ soit inférieure à une valeur donnée x, ou supérieure à cette valeur, ou comprise entre deux valeurs déterminées x_1 et x_2.

En effet :

$$P(X < x) = P(Z < t) = \pi(t).$$

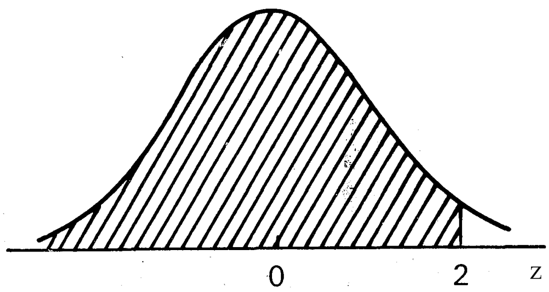
Dans chaque cas particulier, un graphique facilite beaucoup le raisonnement.

Exemple 8.3.10.8 Soit X une variable normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

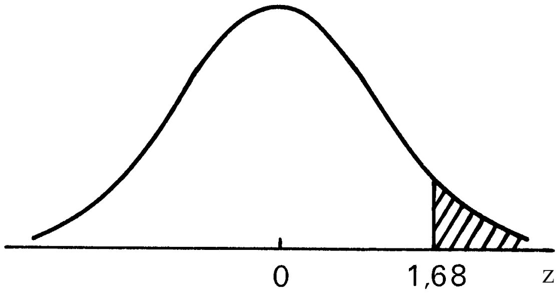
- Probabilité pour que X soit inférieur à 9.

  La valeur de la variable normale centrée réduite correspondant à $X = 9$ est :

$$\begin{aligned} t &= \frac{9-5}{2} = 2. \\ P(X < 9) &= P(Z < 2) = \pi(2) \\ &= 0.9772. \end{aligned}$$

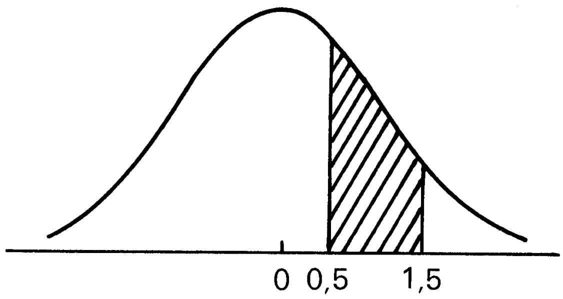


- Probabilité pour que X soit supérieur ou égal à 8.36.



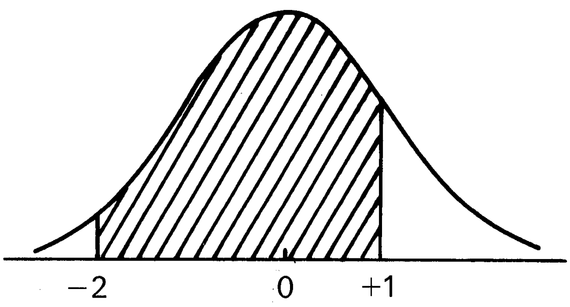
$$t = \frac{8.36 - 5}{2} = 1.68.$$
$$\begin{aligned} P(X \geq 8.36) &= P(Z \geq 1.68) \\ &= 1 - P(Z < 1.68) \\ &= 1 - \pi(1.68) \\ &= 1 - 0.9535 = 0.0465. \end{aligned}$$

- Probabilité pour que X soit compris entre 6 et 8.



$$t_1 = \frac{6-5}{2} = 0.5, \quad t_2 = \frac{8-5}{2} = 1.5,$$
$$\begin{aligned} &P(6 \leq X < 8) \\ &= P(0.5 \leq Z < 1.5) \\ &= P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5) \\ &= \pi(1.5) - \pi(0.5) \\ &= 0.9332 - 0.6915 \\ &= 0.2417. \end{aligned}$$

- Probabilité pour que X soit compris entre 1 et 7.



$$t_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \quad t_2 = \frac{7-5}{2} = 1,$$
$$\begin{aligned} &P(1 \leq X < 7) \\ &= P(-2 \leq Z < 1) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -2) \\ &= P(Z < 1) - [1 - P(Z < 2)] \\ &= \pi(1) - [1 - \pi(2)] \\ &= 0.8413 - 0.0228 = 0.8185. \end{aligned}$$

Règle de calcul de probabilités

Dans l'utilisation de la table de la loi normale standardisée $\mathcal{N}(0;1)$, on aura des calculs de probabilités à faire. On les fera avec les règles suivantes :

$$\begin{aligned} P(X = a) &= 0 \\ P(X < a) &= P(X \leq a) \\ P(X > a) &= 1 - P(X \leq a) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq -a) &= P(X \geq a) = 1 - P(X < a) \\
P(-a \leq X \leq a) &= 2P(X \leq a) - 1
\end{aligned}
$$

Les trois premières règles sont vraies pour toute v.a. X à densité (car pour ces lois les points sont négligeables). Les deux dernières sont vraie pour toute loi symétrique (c.à.d avec densité paire : $f(-t) = f(t)$, comme la loi normale ou (cf. après) la loi de Student mais pas la loi du χ^2).

Utilisation de la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
Table 6. à l'Annexe [11]
Cette table nous donne

$$P(Z < t) = \pi(t)$$

La I^{ere} valeur de t donnée par la table est $t = 0$.
Comme nous l'avons vu pour $t = 0$, $P(Z < 0) = \pi(0) = 0.50$.

1. $P(Z < 1.47)$. En lisant directement la table (ligne 1.4 et colonne 0.07), nous avons $P(Z < 1.47) = \pi(1.47) = 0.9292$,

2. $P(Z > 1.47) = 1 - P(Z < 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$.

3. $P(Z < -0.66)$. La table ne donne $P(Z < t)$ que pour $t > 0$. Lorsque $t < 0$, il faut utiliser la caractéristique de $f(t)$ qui est symétrique par rapport à $E(z) = \mu = 0$,
$$P(Z < -0.66) = \pi(-0.66) = 1 - \pi(0.66) = 1 - 0.7454 = 0.2546$$

4. $P(Z > -0.66) = P(Z < 0.66) = \pi(0.66) = 0.7454$. Tout ceci en raison de la symétrie par rapport à $E(z) = 0$.

5. $P(0.56 < Z < 1.24)$
$$
\begin{aligned}
P(0.56 < Z < 1.24) &= P(Z < 1.24) - P(Z < 0.56) \\
&= \pi(1.24) - \pi(0.56) = 0.8925 - 0.7123 \\
&= 0.1802
\end{aligned}
$$

6. $P(-2 < Z < 2)$
$$
\begin{aligned}
P(-2 < Z < 2) &= \pi(2) - \pi(-2) = \pi(2) - (1 - \pi(2)) \\
&= \pi(2) - 1 + \pi(2) \\
&= 2\pi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544
\end{aligned}
$$

7. $P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3)$: 2 solutions sont possibles :
   - $$
\begin{aligned}
P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= P(Z < 1.5) + P(Z > 2.3) \\
&= \pi(1.5) + 1 - \pi(2.3) \\
&= 0.9332 + 1 - 0.9893 = 0.9439
\end{aligned}
$$
   - $$
\begin{aligned}
P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= 1 - P(1.5 < Z < 2.3) \\
&= 1 - (\pi(2.3) - \pi(1.5)) \\
&= 1 - 0.9893 + 0.9332 = 0.9439
\end{aligned}
$$

8. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.8508$.
   La probabilité est supérieure à $0.5 \Rightarrow t > 0$.
   En lisant directement la table, on voit que pour $t = 1.04$, $\pi(t) = 0.8508$.

9. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.0116$.
   La probabilité est inférieure à $0.5 \Rightarrow t < 0$.
   On sait que $\pi(-t) = 1 - \pi(t) = 0.0116$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.0116 = 0.9884 \quad &\Rightarrow \quad t = 2.27 \\ &\Rightarrow \quad t = -2.27 \end{aligned}$$

10. Calculer t sachant que $P(Z > t) = 0.123$.
    On sait que $P(Z > t) = 1 - P(Z < t) = 1 - \pi(t) = 0.123$

$$\Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.123 = 0.877 \Rightarrow t = 1.16$$

11. Calculer t_1 et t_2 sachant que $t_2 = -t_1$ et que $P(t_1 < Z < t_2) = 0.903$.

$$\begin{array}{cl} \text{Comme} & t_2 = -t_1 \\ \Rightarrow & \pi(t_2) - \pi(t_1) = \pi(t_2) - \pi(-t_2) \\ = & \pi(t_2) - (1 - \pi(t_2)) \\ = & 2\pi(t_2) - 1 = 0.903 \\ \Rightarrow & 2\pi(t_2) = 1.903 \Rightarrow \pi(t_2) = 0.9515 \\ & \Rightarrow t_2 = 1.66; \quad t_1 = -1.66 \end{array}$$

Exemples de calcul sur une loi normale

Exemple 8.3.10.9 La v.a. X = "poids d'un foie gras", suit une loi $\mathcal{N}(550; 100)$. Quelle est la probabilité pour qu'un foie gras pèse moins de 650g, plus de 746g, moins de 500g, entre 550 et 600g ?

$$\begin{aligned} P(X < 650) &= P\left(Z < \frac{650 - 550}{100}\right) = P(Z < 1) = \pi(1) = 84.13\% \\ P(X > 746) &= P\left(Z > \frac{746 - 550}{100}\right) = P(Z > 1,96) \\ &= 1 - \pi(Z \leq 1.96) = 1 - \pi(1.96) = 1 - 0.9750 = 2.5\% \\ P(X < 500) &= P\left(Z < \frac{500 - 550}{100}\right) = P(Z < -0.5) = \pi(-0.5) \\ &= 1 - \pi(0.5) = 1 - 0.6915 = 30.85\% \\ P(550 < X < 600) &= P(0 < Z < 0.5) = \pi(0.5) - \pi(0) = 0.8413 - 0.5 = 34.13\% \end{aligned}$$

Rappelons que pour une variable continue, il n'y a pas de différence entre $P(X < k)$ et $P(X \leq k)$ car la probabilité attachée à la valeur k est nulle.

Exemple 8.3.10.10 Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ème et le 240-ème jour précédent l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception ait eu lieu à ce moment ?
Solution :

$$\begin{aligned}
P(X > 290 \cup X < 240) &= P(X > 290) + P(X < 240) \\
&= P\left(\frac{X-270}{10} > 2\right) + P\left(\frac{X-270}{10} < -3\right) \\
&= P(Z > 2) + P(Z < -3) = 1 - P(Z < 2) + 1 - P(Z < 3) \\
&= 2 - \pi(2) - \pi(3) = 2 - 0.9772 - 0.99865 = 0.02415,
\end{aligned}$$

après consultation de la table fournissant certaines valeurs de la loi normale centrée réduite.

Test sur le chapitre : Lois (Distributions) de probabilité continues particulières

1. Décrivez la loi uniforme continue. Pour une variable aléatoire continue X, qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, donnez la fonction de répartition $f(x)$.

2. Décrivez la situation du phénomène pour que la distribution de la variable aléatoire correspondante soit indiquée comme normale.

3. Expliquez les paramètres μ et σ de la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de la loi normale.

4. Décrivez la loi normale standardisée

Chapitre 9

Conditions d'application de la loi normale. Convergence en loi

9.1 Loi des grands nombres

Théorème 11 - (Loi forte des grands nombres) - Soit X_1, X_2, …, $X_n, \dots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes obéissant toutes à une même loi de probabilité ayant une espérance mathématique μ. Alors avec une probabilité égale à 1, la suite des variables aléatoires

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

tend vers μ lorsque n augmente indéfiniment.

Ce résultat est d'une grande importance car c'est lui qui permet de relier la théorie à la pratique. Nous avons jusqu'à présent construit un modèle mathématique basé sur une notion abstraite, celle de probabilité, et nous en avons déduit la notion d'espérance mathématique. La loi forte des grands nombres montre que, si un nombre X qui dépend du hasard se conforme à ce modèle mathématique, c'est-à-dire peut être considéré comme une variable aléatoire, **on peut mesurer son espérance mathématique : Il suffit de faire une suite de tirages indépendants $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de ce nombre X et on verra peu à peu la suite correspondante des moyennes $\bar{X}_n$ se stabiliser autour d'une certaine valeur. C'est cette valeur qui est l'espérance mathématique de X.** Cette régularité s'observe aussi expérimentalement de la façon suivante : En plusieurs occasions différentes, on fait un grand nombre de tirages indépendants de X. Alors, et quoique les valeurs prises par X puissent être très différentes les unes des autres, les moyennes des valeurs prises sont à peu près les mêmes dans ces diverses occasions. Cela s'explique ainsi : La première occasion conduit aux m observations X_1, …, X_m, la seconde aux n observations X'_1, …, X'_n. Alors, si m et n sont grands, les 2 moyennes

$$\bar{X}_m = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{m} \quad \text{et} \quad \bar{X}_n = \frac{X'_1 + \ldots + X'_n}{n}$$

sont toutes deux proches du même nombre $E(X)$ et sont, par suite, proches l'une de l'autre.

9.2 Le théorème de la limite centrale (ou théorème central limite, T.C.L.)

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ. La loi forte des grands nombres indique que, si l'on prend un échantillon de grande taille $(X_1, \ldots, X_n)$ de cette variable aléatoire, la moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ est, en général, assez proche de μ. Nous aurons besoin, en Statistique, de préciser ceci, c'est-à-dire d'avoir une idée de la grandeur de $|\bar{X} - \mu|$. Nous nous servirons pour cela du *théorème de la limite centrale.*

Ce théorème montre encore que, bien souvent, la loi d'une variable aléatoire X est approximativement une loi gaussienne.

Théorème 12 - Théorème central-limite /TCL/
Si $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de probabilité de paramètres connus μ_1, μ_2, ..., μ_n et σ_1, σ_2, ..., σ_i, ..., σ_n, la variable aléatoire Y définie comme la somme de ces n variables aléatoires indépendantes tend à suivre une loi normale dès que n est grand.

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

avec $\mu = \sum_i \mu_i$ et $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$
ou, avec une conclusion formulée autrement

$$\frac{Y - \mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Le TCL sera très précieux puisqu'il nous explique que **si on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires de loi quelconque, cette somme suit approximativement une loi normale (en fait, sans rentrer dans le détail des hypothèses, il nous dit que la variable $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tend à suivre une loi normale quand n tend vers l'infini)**.

D'une part, cela nous permet de comprendre pourquoi autant de distributions observées dans la réalité ont approximativement cette forme de cloche : elles décrivent des phénomènes qui résultent de l'addition d'un grand nombre de causes de fluctuation indépendantes. Exemple : la taille d'un individu.
D'autre part, cela nous permettra d'approcher beaucoup de lois par une loi normale, pour peu que la variable étudiée s'exprime comme une somme d'un grand nombre de variables indépendantes.

C'est le cas notamment de la variable binômiale (somme de n variables de Bernoulli indépendantes), dont la loi "tend à prendre la forme d'une cloche" quand n augmente.
Cela reste possible même quand on ne connaît pas la loi des variables X_i.

9.3 Approximation de la loi binômiale par la loi normale

Nous avons vu que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est d'autant plus symétrique que p est proche de 0.5 et qu'elle prend une forme en cloche quand n augmente (d'autant plus vite que p est proche que 0,5 ...)
Le TCL donne une justification à ce phénomène. [12]
Soit une variable aléatoire binomiale $X = \mathcal{B}(n,p)$ dont le paramètre n croît indéfiniment, p n'étant pas trop voisin de 0, ni de 1. Dans ces conditions, la loi binômiale tend vers la loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$:

$$\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}).$$

L'approximation d'une loi binômiale par la loi normale a pour origine le théorème de Moivre-Laplace :

Théorème 13 Théoréme de Moivre-Laplace :
Si une variable aléatoire X obéit à la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, le produit $np(1-p)$ étant grand, la variable aléatoire

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

obéit à une loi qui est proche de la loi gaussienne réduite, c.a.d. $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \to_{n\to+\infty} \mathcal{N}(0,1)$.

L'approximation n'est valable que si n est élevé.
Le théorème de Moivre-Laplace est un cas particulier du théorème central-limite.
La loi normale est souvent utilisée comme approximation de la loi binomiale, notamment dans le domaine des sondages. La table $\pi(t)$ sert à évaluer la probabilité pour que la valeur de la variable binomiale se trouve à l'intérieur d'un intervalle déterminé.
Rémarques :

1. A partir de quelle valeur de n l'approximation est-elle valable ? La convergence est rapide si $p = 0.5$. Elle est d'autant plus lente que p est différent de cette valeur. Il est souvent admis que **l'approximation devient valable si**

$$\begin{array}{ll} & npq > 9 \\ \textbf{ou} & n > 20 \textbf{ et } np > 10 \textbf{ et } nq > 10 \\ \textbf{ou} & n > 30 \textbf{ et } np > 5 \textbf{ et } nq > 5 \\ \textbf{ou} & n \geq 30 \textbf{ et } np \geq 15 \textbf{ et } nq > 5. \end{array}$$

2. L'approximation pose le problème du passage d'une loi discrète à une loi continue.
   La loi binômiale étant discrète et la loi normale étant continue, on ne peut approximer $P(X = k)$ par $P(Z = k)$ où Z suit la loi normale centrée réduite : en effet, $P(Z = k)$ est toujours nul.
   On doit donc substituer à une valeur discrète un intervalle continu. On doit remplacer k par l'intervalle $[k - 0.5, k + 0.5]$. Cette substitution est qualifiée de **correction de continuité.**
   Par exemple la valeur 8 est remplacée par l'intervalle $[7.5; 8.5]$ et $P(X = 8) = P(7.5 < Z < 8.5)$.

Correction de continuité Graphiquement, remplacer une variable discrète par une variable continue revient à substituer un histogramme au diagramme en bâtons. Dans cet histogramme, la probabilité P_x est représentée par un rectangle dont la base, de longueur unité, est centrée sur la valeur x et dont la hauteur est égale à P_x.

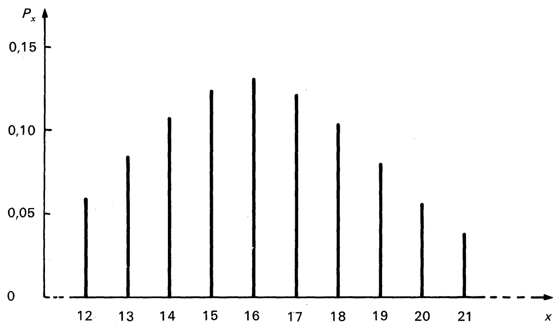
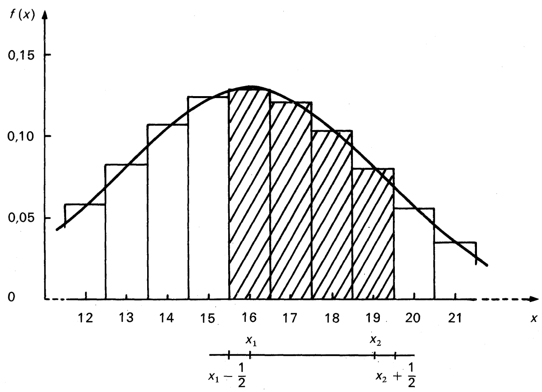


Diagramme en bâtons



Histogramme binômial et courbe normale.
Approximation de la loi binômiale par la loi normale
Correction de continuité

D'une façon générale :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

est représentée par la somme des aires des rectangles représentatifs entre $x_1 - \frac{1}{2}$ et $x_2 + \frac{1}{2}$.

Dans l'approximation normale, on substitue à l'histogramme la courbe normale. En effet, si les conditions de convergence sont remplies, il y a sensiblement compensation entre les parties ajoutées ou retranchées à chacun des rectangles. Il n'en reste pas moins que la somme des probabilités doit être calculée sur l'intervalle $(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2})$ et non sur l'intervalle (x_1, x_2)

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) - F\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)$$

Cette correction des limites de l'intervalle d'intégration est appelée correction de continuité. Son incidence est d'autant plus importante que les limites x_1 et x_2 sont plus proches de la moyenne $\mu = np$ et que l'écart-type est plus petit.

Remarques :

Les règles à utiliser pour cette correction s'énoncent comme suit :

Loi discrète $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ ou $P(\lambda)$	$\approx_{cc}$	Loi continue $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$
$P(X = a)$		$P(a - 0.5 \leq Z \leq a + 0.5)$
$P(a \leq X \leq b)$		$P(a - 0.5 \leq Z \leq a + 0.5)$
$P(x \leq a)$		$P(Z \leq a + 0.5)$
$P(x \geq a)$		$P(Z \geq a - 0.5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 1)$		$P(Z \geq a + 0.5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 1)$		$P(Z \leq a - 0.5)$
$P(a < X < b)$		$P(a + 0.5 \leq Z \leq b - 0.5)$
$P(a < X \leq b)$		$P(a + 0.5 < Z < b + 0.5)$

Dans le cas où l'intervalle considéré pour X englobe une grande partie de l'étendue totale, la correction n'a pas beaucoup d'influence.

Exemple 9.3.1 D'après une étude réalisée auprès des assurés d'une compagnie, il semble que 30% des assurés sont intéressés par un nouveau contrat pour renforcer leur protection en cas d'accident corporel de la vie quotidienne. Le responsable interroge 70 assurés choisis au hasard afin de connaître leur réaction sur ce nouveau contrat.
1) Quelle est la probabilité que 15 assurés se déclarent intéressés par ce nouveau contrat ?

X : le nombre d"assurés intéressés par le nouveau contrat

Loi exacte : $X \sim \mathcal{B}(n = 70; p = 0.3)$; $P(X = k) = C_{70}^{k}\, 0.3^{k}\, 0.7^{30-k}$ $k = 0, 1, \ldots, 70$

$P(X = 15) = C_{70}^{15}\, 0.3^{15}\, 0.7^{55} = 0.031292174 = 3.13\%$

2) Quelle est la probabilité qu'au plus 20 assurés se déclarent intéressés par ce nouveau contrat ?

$$P(X \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} P(X = k) = \sum_{k=0}^{20} C_{70}^{k}\, 0.3^{k}\, 0.7^{70-k} = 0.455020367 = 45.50\%$$

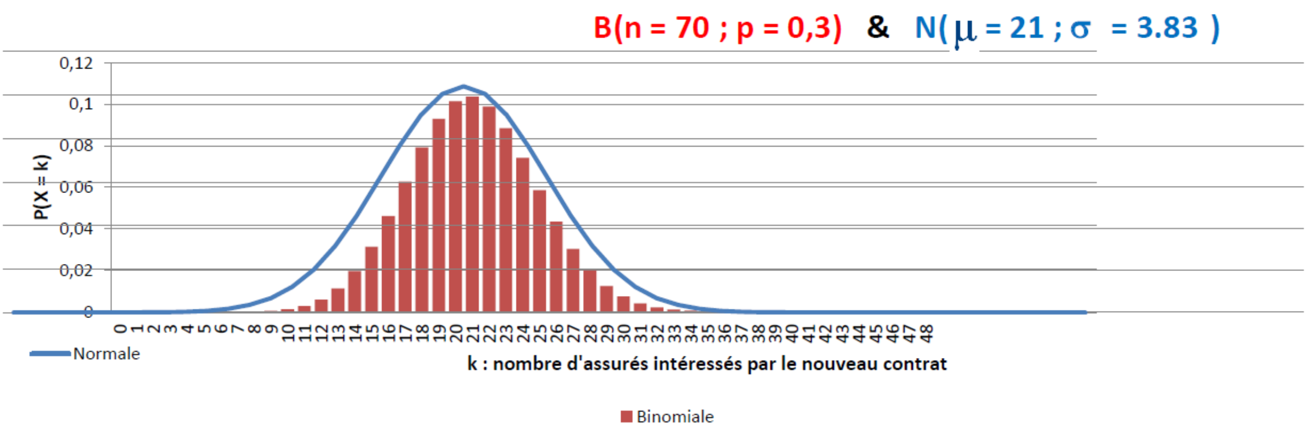
3) Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

$n = 70$; $p = 0.3(< 1/2)$; $np = 21(> 15)$ (Les conditions sont respectées)

$$X \sim \mathcal{B}(n = 70; p = 0.3) \approx \mathcal{N}(\mu = np = 21; \sigma = \sqrt{npq} = 3.83)$$

Les valeurs approchées (cf. table $\mathcal{N}(0, 1)$) :

$$\begin{aligned}
P(X = 15) \quad &\approx_{C.C.} \quad P(14.5 \leq X \leq 15.5) = P(-1.697 \leq U \leq -1.436) \\
&= \pi(-1.436) - \pi(-1.697) = \pi(1.697) - \pi(1.436) \\
&= 0.03070693 = 3.07\% \\
P(X \leq 20) \quad &\approx_{C.C.} \quad P(X \leq 20.5) = P(U \leq -0.13054) = 1 - \pi(0.13054) \\
&= 0.448120 = 44.81\%
\end{aligned}$$



Valeurs approchées :

$P(X=15) \approx_{C.C.} P(14.5 \leq X \leq 15.5) = 3.07\%$

$P(X \leq 20) \approx_{C.C} P(X \leq 20.5) = 44.81\%$

Valeurs exactes :

$\mathcal{B}(70, 0.3)$

k	$P(X=k)$	$F(X)$
0	1.43504 E -11	1.43504E-11
1	4.30511E-10	4.44861E-10
:	:	:
14	0.019557609	0.041269669
15	0.031292174	0.072561843
:	:	:
20	0.101515566	0.455020367
:	:	:
70	2.50316E-37	1

Exemple 9.3.2 [12] On tire un échantillon de taille $n = 40$ dans une population comportant une proportion $p = 0.4$ d'individus présentant un certain caractère A. Évaluons la probabilité d'avoir dans l'échantillon un nombre d'individus X présentant ce caractère, supérieur ou égal à 16 et strictement inférieur à 20 :

$$P(16 \leq X < 20).$$

Le nombre X d'individus présentant le caractère A est une variable binômiale d'espérance mathématique $np = 16$ et d'écart-type $\sqrt{npq} = 3.1$. Cette loi binômiale peut être approchée par la loi normale ayant même espérance mathématique et même écart-type.

S'agissant de l'approximation d'une variable discrète, ne pouvant prendre que certaines valeurs entières, par une variable continue, une attention particulière doit être d'abord apportée aux limites de l'intervalle dont on recherche la probabilité.

En effet, si X est une variable continue, il importe peu que la limite de l'intervalle soit

$$X < 20 \quad \text{ou} \quad X \leq 20,$$

la probabilité que X soit rigoureusement égale à 20 étant nulle (seule la probabilité que X soit compris dans un intervalle infinitésimal entourant le point d'abscisse 20 a une valeur infiniment petite, mais non nulle). Par contre, si X est une variable discrète, écrire :

$$X < 20$$

signifie :

$$X \leq 19,$$

la variable X ne pouvant prendre aucune autre valeur entre 19 et 20.

Dans l'approximation normale, nous devons donc déterminer en réalité :

$$P(16 \leq X \leq 19).$$

Les valeurs de la variable normale centrée réduite correspondant à 16 et 19 sont :

$$z_1 = \frac{16-16}{3.1} = 0., \quad z_2 = \frac{19-16}{3.1} = 0.97$$

$$
\begin{aligned}
&P(16 \leq X \leq 19) = P(0 \leq Z \leq 0.97)\\
&P(Z \leq 0.97) - P(Z < 0)\\
&= \Pi(0.97) - \Pi(0)\\
&= 0.8340 - 0.5000 = 0.3340.
\end{aligned}
$$

La probabilité exacte est :

$$P(16 \leq X \leq 19) = P_{16} + P_{17} + P_{18} + P_{19}.$$

où P_x est calculé suivant la formule de la loi binômiale :

$$P_x = C_n^x p^x q^{n-x}.$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
P_{16} &= 0.1279\\
P_{17} &= 0.1204\\
P_{18} &= 0.1026\\
P_{19} &= 0.0792\\
\hline
P(16 \leq X \leq 19) &= 0.4301
\end{aligned}
$$

Dans ce cas particulier, l'approximation n'apparaît pas comme particulièrement satisfaisante : cela tient au fait que nous avons négligé certains aspects de l'approximation d'une variable discrète par une variable continue. Il est nécessaire d'effectuer correction de continuité.

Correction de continuité

$$
\begin{aligned}
&z_1 = \frac{15.5-16}{3.1} = -0.16, \qquad z_2 = \frac{19.5-16}{3.1} = 1.13\\
&P(16 \leq X \leq 19) = P(-0.16 \leq Z \leq 1.13)\\
&\qquad = P(Z \leq 1.13) - P(Z < 0.16)\\
&\qquad = \Pi(1.13) - [1 - \Pi(0.16)]\\
&\qquad = 0.8708 - 0.4364 = 0.4344.
\end{aligned}
$$

Comparée à la véritable probabilité calculée précédemment (0.4301), l'approximation apparaît, cette fois-ci, comme acceptable pour la plupart des applications.

A retenir :
Si n est suffisamment grand et si la distribution n'est pas trop dissymétrique, une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être considérée comme une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Pour le calcul des probabilités, on peut utiliser

$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en effectuant une amélioration de la précision de l'approximation, on dit qu'on effectue une “correction de continuité”.

Si les deux moitiés de rectangle situées à droite et à gauche de l'intervalle $[a,b]$ ont une aire négligeable par rapport à l'ensemble, on se permettra d'écrire :

$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Critère de la validité de l'approximation :

$$np \geq 10 \text{ et } n(1-p) \geq 10$$

Ce critère permet de tenir compte de la valeur de n et de la dissymétrie.
Exemple : si $p = \frac{1}{2}$, $n \geq 20$; si $p = \frac{1}{4}$, $n \geq 40$; $p = 0.9$, $n \geq 100$. Pour p donné, plus n est grand, meilleure est l'approximation.

On peut abandonner la correction de continuité dès que la modification qu'elle apporte est négligeable :

- lorsque n est très grand ; la correction de continuité déplace les bornes concernant Z de $\pm\frac{0.5}{\sqrt{np(1-p)}}$. Un déplacement de 0.01 (qui correspond pour $p = \frac{1}{2}$ à $n = 10000$) a peu d'importance.
- lorsque ces bornes sont situées dans une zone de faible probabilité (consulter les tables).
- lorsque l'intervalle $[a,b]$ contient beaucoup d'entiers (faible erreur relative). On remarquera à ce propos que pour $a = b$, on a :

$$P(X = a) \approx P\left(\frac{a-0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{a+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{9.1}$$

  Il est évident qu'alors, quel que soit n, il n'est pas question de supprimer ± 0.5.

Pour terminer, on attirera l'attention sur deux points

- La variable aléatoire X, de loi $\mathcal{B}(n,p)$, est une variable discrète. Il est donc important de préciser si les bornes de l'intervalle sont ou non inclues dans l'intervalle ; ceci peut modifier en particulier le signe du terme correctif 0.5.
- Il n'est pas choquant d'approcher une distribution sur un ensemble fini de valeurs par une distribution sur $\mathbb{R}$ puisqu'on sait que pour les lois $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ pratiquement toute la probabilité est concentrée autour de l'espérance np.

Exemple 9.3.3 Soit $X \sim \mathcal{B}(20, \frac{1}{2})$. Le tableau ci-dessous donne une idée de la validité de l'approximation par une loi normale.

k	$P(X = k)$ Loi binômiale	Loi normale (eq. 9.1)
10	0.176197	0.176929
9 ou 11	0.160179	0.160367
8 ou 12	0.120134	0.119390
7 ou 13	0.073929	0.073013
6 ou 14	0.036964	0.036678
etc.		

Exemple 9.3.4 On joue 10000 fois à pile ou face. Calculer la probabilité pour que le nombre de piles soit dans l'intervalle [4900, 5100].

Soit X le nombre de piles. X suit une loi $\mathcal{B}(10000, \frac{1}{2})$ que l'on peut approcher par une loi $\mathcal{N}(5000, 25)$. On obtient, en désignant par Z une variable $\mathcal{N}(0, 1)$:

- sans correction de continuité :

$$\begin{aligned} P(4900 \leq X \leq 5100) &= P\left(\frac{4900 - 10000\frac{1}{2}}{\sqrt{10000\frac{1}{2}\frac{1}{2}}} \leq Z \leq \frac{5100 - 10000\frac{1}{2}}{\sqrt{10000\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 95.45\% \end{aligned}$$

- avec correction de continuité :

$$\begin{aligned} P(4900 \leq X \leq 5100) &= P(4899.5 \leq X \leq 5100.5) = P(-2.01 \leq Z \leq 2.01) \\ &\approx 95.55\% \end{aligned}$$

Exemple 9.3.5 Soit X de loi $\mathcal{B}(100, 0.3)$. Estimer $P(24 \leq X \leq 29)$. On considère que X suit une loi $\mathcal{N}(30, 21)$ (puisque $n(1-p) > 10$ et $np > 10$)
On obtient :

- sans correction de continuité :

$$P(24 \leq X \leq 29) = P(-1.3093 \leq Z \leq -0.2182) \approx 0.3145$$

- avec correction de continuité :

$$P(23.5 \leq X \leq 29.5) = P(-1.4184 \leq Z \leq -0.1091) \approx 0.3785$$

Le résultat exact est ≈ 0.3868.

Exemple 9.3.6 On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans quelle est la probabilité pour que moins de 25 germent ?

Notons p la probabilité qu'une graine germe : $p = 0.3$ et considérons que l'échantillon est indépendant.
Notons X la v.a. "nombre de graines qui germent parmi les 100".

X suit la loi $\mathcal{B}(100; 0.3)$ et on cherche : $P(X < 25)$ qui peut s'écrire aussi $P(X \leq 24) = p_0 + p_1 + \ldots + p_{24}$ avec $p_k = \binom{100}{k} 0.3^k \, 0.7^{100-k}$.

Le calcul exact est trop fastidieux pour être fait à la main. On peut alors :

- soit utiliser un logiciel, par exemple la fonction d'Excel
/LOI.BINOMIALE(24 ;100 ;0.3 ;1) /
ou en anglais : BINOMDIST(24 ;100 ;0.3 ;1)/ qui donne $P(X \leq 24) = 0,114$

- soit calculer une valeur approchée en remplaçant cette loi binômiale par une loi normale.

  C'est possible car les produits np et nq sont assez grands (resp. 30 et 70). Les paramètres de cette loi seront :

  - $\mu = np = 30$
  - $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.3 * 0.7} = 4,5826$

La variable aléatoire discrète $X \sim \mathcal{B}(100; 0.3)$ sera alors remplacée par la variable continue : $X_c \sim \mathcal{N}(30; 4.5826)$

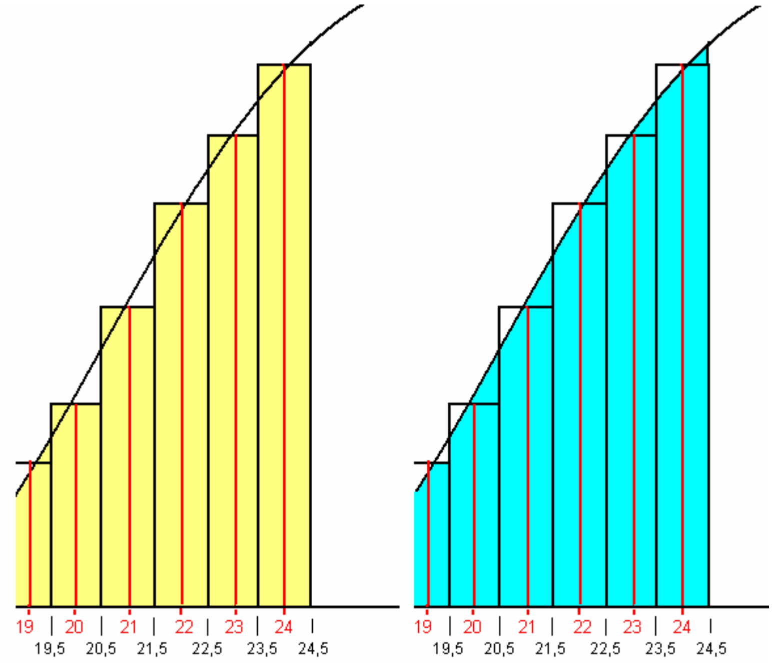
Un problème se pose alors : faut-il calculer $P(X_c < 25)$ ou $P(X_c \leq 24)$? Pour une variable continue, ces valeurs ne sont pas identiques. La meilleure approximation sera obtenue en prenant la valeur intermédiaire 24,5. C'est ce qu'on appelle la "correction de continuité".
Voir la justification en bas.

$$\begin{aligned} P(X < 25) = P(X \leq 24) \approx P(X_c \leq 24,5) &= \pi\left(\frac{24.5 - 30}{4.5826}\right) = \pi(-1.20) \\ &= 1 - \pi(1.20) = 1 - 0.885 = 0.115 \end{aligned}$$

/On a appliqué les relations (8.1) et (8.2) et la table de la fonction de répartition $\pi(t)$ (annexe : Table 6)/

On peut constater que ceci fournit une excellente approximation de la vraie valeur puisque l'erreur est de l'ordre du millième.

Correction de continuité



En jaune : la valeur exacte que l'on veut calculer. En effet $P(X \leq 24) = p_0 + p_1 + \ldots + p_{24}$, ce qui correspond à la somme des hauteurs de bâtons rouges du diagramme en bâton de la loi binômiale. Cette somme est égale à la surface des rectangles jaunes puisque ces rectangles ont pour hauteur les p_i et pour base 1.

En bleu : ce qu'on calcule en prenant $P(X_c \leq 24.5)$, qui correspond à la surface sous la courbe de densité à gauche du point 24,5. On voit bien que l'approximation serait moins bonne en s'arrêtant à 24 ou en allant jusqu'à 25.

On pratique la correction de continuité chaque fois qu'on approche une loi discrète par une loi continue (en fait chaque fois qu'on hésite entre 2 valeurs comme entre 24 et 25 ici).

Exemple 9.3.7 On prend un échantillon de 500 pièces. On sait qu'il y a 40% de pièces dont le poids est inférieur à 590 g.

1. Soit X le nombre de pièces dont le poids est inférieur à 590 g. Quelle est la loi suivie par X ?

2. Comme peut-on approximer cette loi ? Calculer $P(165 < X < 195)$.

Solution :

1. Les épreuves sont indépendantes et $n = 500$.
   Il y a 2 résultats possibles : $\begin{array}{l} \text{poids} < 590 \text{ g} \rightarrow p = 0.4 \\ \text{poids} \geq 590 \text{ g} \rightarrow q = 1 - p = 0.6 \end{array}$

$$\Longrightarrow X \sim \mathcal{B}(500, 0.4)$$

2.

$$n = 500 > 30; \quad np = 500 \times 0.4 = 200 > 5; \quad nq = 500 \times 0.6 = 300 > 5$$

On peut approximer la loi Binômiale par une loi Normale de paramètres :

$$E(X) = np = 200 \text{ et } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120} = 10.954$$

$$X \sim \mathcal{N}(200, 10.954)$$

$$\begin{aligned} P(165 < X < 195) &= P(X < 195) - P(X < 165) \\ &= P\left(Z < \frac{195-200}{10.954}\right) - P\left(Z < \frac{165-200}{10.954}\right) \\ &= \pi(-0.456) - \pi(-3.195) \\ &= \pi(3.195) - \pi(0.456) = 0.9993 - 0.6736 = 0.3257 \end{aligned}$$

En tenant compte de la correction de passage du discret au continu, nous avons :

$$\begin{aligned} P(165 < X < 195) &\approx_{C.C.} P(165 + 0.5 \leq X \leq 195 - 0.5) \\ &= P\left(\frac{165+0.5-200}{10.954} \leq Z \leq \frac{195-0.5-200}{10.954}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{195-0.5-200}{10.954}\right) - P\left(Z < \frac{165+0.5-200}{10.954}\right) \\ &= \pi(-0.5021) - \pi(-3.14953) \quad /\pi(-t) = 1 - \pi(t) \\ &= \pi(3.1495) - \pi(0.5021) = 0.9990 - 0.66985 = 0.32915 \end{aligned}$$

Exemple 9.3.8 Dans un service comprenant 300 employés, on remarque que chaque employé veut téléphoner au-dehors en moyenne 6 minutes par heure. En ne tenant pas compte des appels venus de l'extérieur, quel est le nombre minimum N de lignes téléphoniques qu'il faut mettre à la disposition du service pour que, à un instant donné r, il y ait une probabilité inférieure à 2,5 % pour que le nombre des lignes soit insuffisant ?

Le nombre X des employés désirant téléphoner au-dehors à l'instant t est une variable aléatoire qui obéit à la loi binomiale $\mathcal{B}(300, p)$ avec $p = 6/60 = 1/10$. Le nombre k de lignes installées est insuffisant si l'on a $X > k$. Le nombre N est donc le plus petit entier k tel que l'on ait

$$P(X > k) \leq 0.025. \tag{9.2}$$

Le théorème 13 montre que l'on peut considérer que la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

est gaussienne réduite. L'égalité (9.2) s'écrit encore

$$P\left(Z > \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \leq 0.025.$$

Comme on a $P(Z > \xi) = 0,025$ pour $\xi = 1.96$, on voit que la relation (9.2) équivaut à $\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} > \xi$ ou encore à

$$\begin{aligned} k > np + \sqrt{np(1-p)}\xi &= 300 \times \frac{1}{10} + \sqrt{300 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} \times 0.025 \\ &= 40.18. \end{aligned}$$

Le plus petit entier k vérifiant cette condition est donc $N = 41$.

Exemple 9.3.9 Une compagnie d'assurances se propose d'assurer n clients contre un certain risque. Notons X_i la somme qu'aura à verser la compagnie au $i-$ème client. C'est une variable aléatoire qui est nulle au cas où ce client n'est pas sinistré. On peut en général considérer que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Supposons, pour simplifier, qu'elles obéissent toutes à une même loi d'espérance mathématique μ et de variance σ^2. La variable aléatoire $X = X_1 + \ldots + X_n$ est la somme totale que la compagnie aura à verser pour les indemnités de sinistre. D'après le théorème 12, on peut considérer, lorsque n est grand, que la variable aléatoire $Z = \frac{X-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ obéit à la loi gaussienne réduite.

Désignons par x la prime demandée par la compagnie à chaque client et supposons que celle-ci désire que la somme $nx - X$ qui lui restera à la fin de l'exercice soit supérieure ou égale à une somme b (déterminée par ses frais de gestion et le bénéfice minimum qu'elle désire faire). Cette compagnie détermine la prime x de la façon suivante : Elle se donne un nombre ε très petit (par exemple $\varepsilon = 0,001$) et elle choisit x assez grand pour que la probabilité de l'événement $(b \leq nx - X)$ soit supérieure à $1 - \varepsilon$. Or, on a :

$$\begin{aligned} P(b \leq nx - X) &= P(X \leq nx - b) \\ &= P\left(\frac{X - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{n(x-\mu) - b}{\sqrt{n}\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{n(x-\mu) - b}{\sqrt{n}\sigma}\right). \end{aligned}$$

On cherche dans la table de la loi gaussienne réduite le nombre ξ vérifiant $P(Z \leq \xi) = 1 - \varepsilon$ et l'on choisit x de façon que l'on ait $\xi \leq \frac{n(x-\mu)-b}{\sqrt{n}\sigma}$ ou encore

$$x \geq \mu + \frac{b}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma\xi.$$

Telle est la condition que doit remplir la prime x pour que la compagnie ait une probabilité au moins égale à $1 - \xi$ de voir se produire l'événement désiré $nx - X \geq b$. On remarquera que cette prime peut être prise d'autant plus petite que les clients sont plus nombreux.

9.3.1 Approximation de la loi de Poisson par la loi de Gauss

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Dans le cas où λ a une valeur suffisamment élevée, on peut considérer que X est de la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Pour décider de la validité de l'approximation, le critère, d'origine empirique, généralement utilisé est : $\lambda \geq 20$.

Comme dans le cas précédent, l'approximation revient à remplacer des sommes de probabilités par des intégrales ; il est donc également nécessaire d'introduire une correction de continuité.

Exemple 9.3.10 Soit X de loi $\mathcal{P}(100)$. Évaluer $P(90 \leq X \leq 100)$.

X suit pratiquement une loi $\mathcal{N}(100, 10)$ et on peut écrire si Z est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et en effectuant la correction de continuité :

$$\begin{aligned} P(89.5 \leq X \leq 100.5) &= P\left(\frac{89.5-100}{10} \leq Z \leq \frac{100.5-100}{10}\right) \\ &= P(-1.05 \leq Z \leq 0.05) = \pi(0.05) - \pi(-1.05) \\ &= \pi(0.05) - (1-\pi(1.05)) = \pi(0.05) + \pi(1.05) - 1 \\ &= 0.5199 + 0.8531 - 1 = 0.4720. \end{aligned}$$

Exemple 9.3.11 [11] Dans un service de réparation, on sait que l'on reçoit 9 appels à l'heure. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus 60 appels pendant une période de 6 heures de travail ?

Il s'agit ici d'une distribution de Poisson avec $k = 9$ par heure de travail.

Comme la période de référence est de 6 heures, $\lambda = kt = 9 \times 6 = 54$.

$\lambda > 20$, on peut donc utiliser la loi Normale comme approximation avec :

$$E(X) = 54, \quad \sigma(x) = \sqrt{54} = 7.348 \rightarrow X \sim \mathcal{N}(54; 7.348)$$

On nous demande $P(X \leq 60) = P\left(Z \leq \frac{60-54}{7.348}\right)$

Si l'on veut tenir compte de la correction de passage du discret au continu, nous aurons :

$$P(X \leq 60.5) = P\left(Z \leq \frac{60.5-54}{7.348}\right) = P(Z \leq 0.884) = 0.8116$$

Exemple 9.3.12 Soit X une v.a.r. qui suit une loi de Poisson d'espérance mathématique $E(X) = 25$.
1) Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 15)$; $P(X > 20)$; $P(15 < X \leq 20)$; $P(X \leq 50)$

Loi exacte : $X \sim P(\lambda = 25)$; $E(X) = \lambda = 25$; $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!\ k = 0, 1, \ldots, +\infty$

Les valeurs exactes :

$P(X = 15) = e^{-25}25^{15}/15! = 0.00989 = 0.99\%$

$P(X > 20) = 1 – P(X \leq 20) = 1 – 0.18549 = 81.45\%$

$P(15 < X \leq 20) = F(20) – F(15) = 0.163199 = 16.32\%$

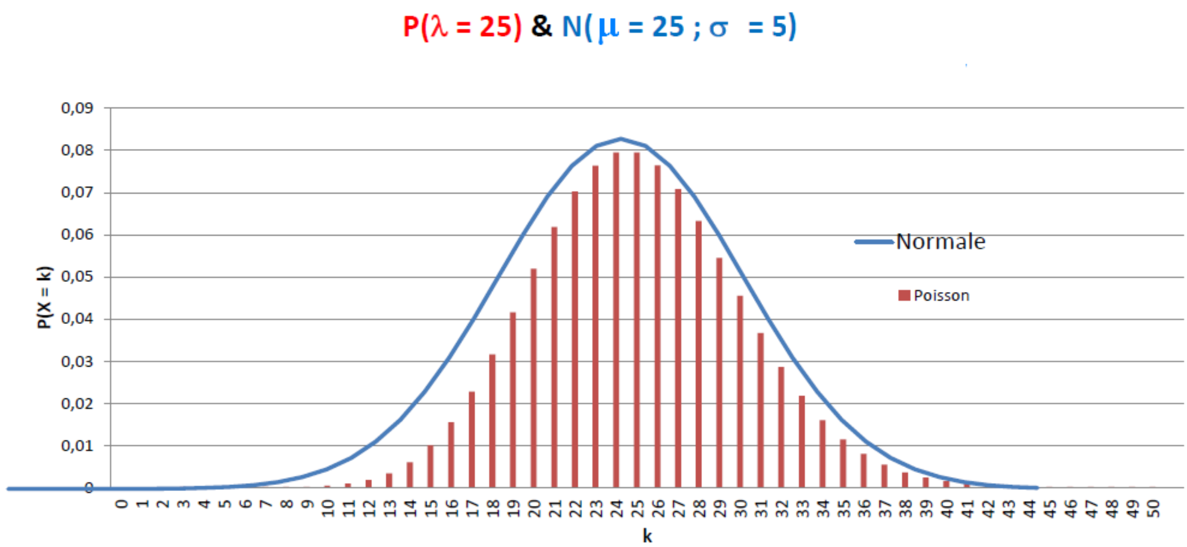
$P(X \leq 50) = F(50) = 0.99999 \approx 100\%$

2) Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

$$\lambda = 25(> 20) \quad (\textit{condition respectée}); \quad X \sim \mathcal{N}(\mu = \lambda = 25, \sigma = \sqrt{\lambda} = 5)$$

Les valeurs approchées (cf. table $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned}
P(X = 15) &\approx_{C.C.} P(14.5 \leq X \leq 15.5) = P(-2.1 \leq U \leq -1.9) \\
&= \pi(2.1) - \pi(1.9) = 1.08\% \\
P(X > 20) &\approx_{C.C.} P(X \geq 20.5) = 1 - P(X < 20.5) \\
&= 1 - P(U \leq -0.9) = 1 - \pi(-0.9) = \pi(0.9) = 81.59\% \\
P(15 < X \leq 20) &\approx_{C.C.} P(15.5 \leq X \leq 20.5) = P(-1.9 \leq U \leq -0.9) \\
&= \pi(-0.9) - \pi(-1.9) = \pi(1.9) - \pi(0.9) \\
&= 0.9713–0.8159 = 15.54\% \\
P(X \leq 50) &\approx_{C.C.} P(X \leq 50.5) = P(U \leq 5.1) \\
&= \pi(5.1) \approx 100\%
\end{aligned}$$



Rapports mutuels des lois de probabilité binômiale et de Poisson et la loi normale
En conclusion on retiendra le schéma ci-dessous qui résume les principales approximations :

$$\begin{tikzcd} & X \sim \mathcal{B}(n,p) \arrow[dl, "\begin{array}{l} n \geq 100 \\ p \leq 0.1 \end{array}"'] \arrow[dr, "\begin{array}{l} np \geq 10 \\ np(1-p) \geq 10 \end{array}"] & \\ \begin{array}{l} X \sim \mathcal{P}(\lambda = np) \\ X \sim \mathcal{P}(\lambda) \end{array} \arrow[rr, "\lambda \geq 20"'] & & \begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)} \\ X \sim \mathcal{N}(\lambda\sqrt{\lambda}) \end{array} \end{tikzcd}$$

La convergence en loi. Résumé

On a rencontré convergence en loi lors de l'approximation de :

- **une loi discrète fini par une autre loi discrète finie :** loi hypergéométrique $H(N, n, p)$ par loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
- **une loi discrète finie par une loi discrète infinie :** loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par loi de Poisson $P(\lambda)$
- **une loi discrète finie par une loi continue :** loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ pal loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$
- **une loi discrète infinie par une loi continue :** loi de Poisson $P(\lambda)$ par loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$

Ce problème se place dans le cadre où on souhaite remplacer la loi d'une variable aléatoire par une loi d'usage plus simple.

Le théorème central-limit et son cas particulier - le théorème de Moivre-Laplace donnent la base théorique pour ce fait. On peut résumer la convergence des loi par les schémas en Figure 9.1 et 9.2.

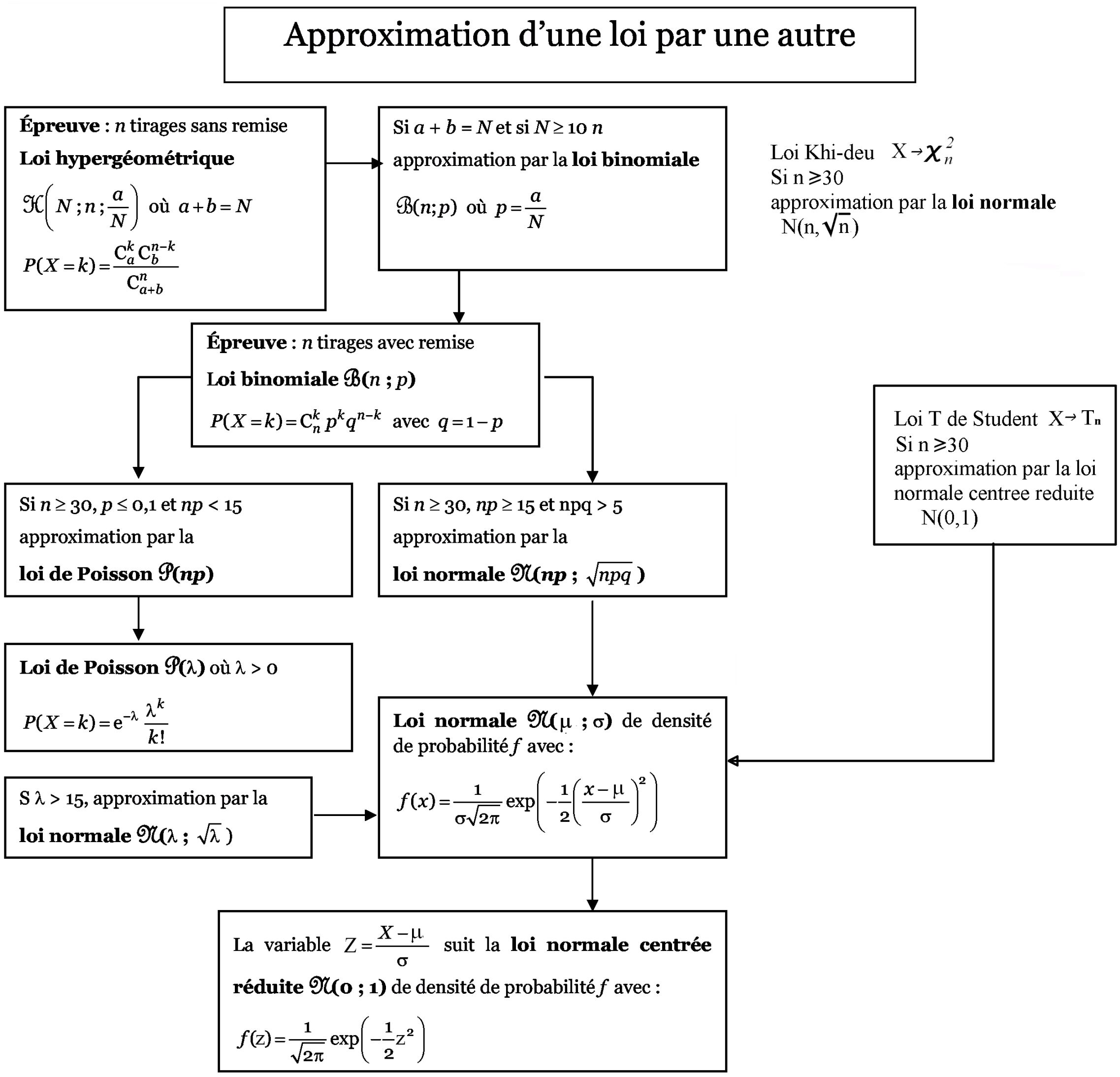


FIGURE 9.1 : Convergence en loi

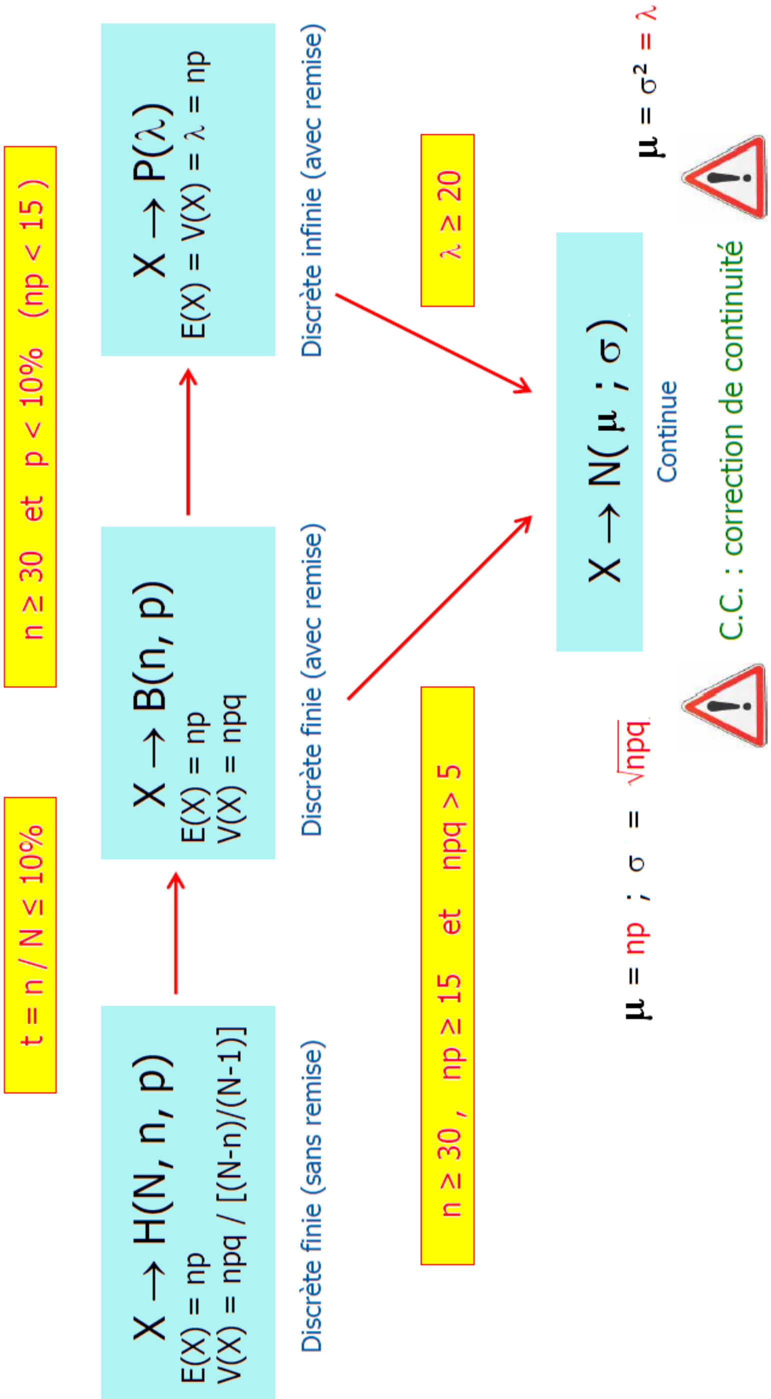


FIGURE 9.2 : Résumés des approximations

Test sur le chapitre : Conditions d'application de la loi normale

1. Énoncer le théorème de la limite centrale.

2. Quelle est la base théorique pour la convergence en loi ?

3. Pourquoi on utilise la convergence en loi ?

4. Qu'est-ce que la correction de continuité et quand on la pratique ?

Chapitre 10

Fonctions de variables aléatoires

10.1 Addition de variables aléatoires indépendantes

10.1.1 Additivité de deux variables indépendantes binômiales

On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$. Lorsque X et Y sont indépendantes,

$$X+Y \sim \mathcal{B}(n+n',p).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k+l) &= \sum_{j=0}^{k+l} P(X=j \cap Y=k+l-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k+l} P(X=j)P(Y=k+l-j) \\
&\quad \text{(car les variables sont indépendantes)} \\
&= \sum_{j=0}^{k+l} C_n^j p^j q^{n-j} C_{n'}^{k+l-j} p^{k+l-j} q^{n'-k-l+j} \\
&\quad \text{(car les variables sont binômiales)} \\
&= p^{k+l} q^{n+n'-(k+l)} \sum_{j=0}^{k+l} C_n^j C_{n'}^{k+l-j} \\
&= C_{n+n'}^{k+l} p^{k+l} q^{n+n'-(k+l)} \\
&\quad \left(\text{car } \sum_{j=0}^{k+l} C_n^j C_{n'}^{k+l-j} = C_{n+n'}^{k+l}, \text{ par récurrence sur } n+n'\right),
\end{aligned}$$

et donc, $X+Y$ suit une loi binômiale de paramètres $n+n'$, p.

Cette propriété s'interprète facilement : si X représente le nombre de succès en n épreuves identiques indépendantes et Y en n' épreuves indépendantes entre elles et indépendantes des premières avec la même probabilité de succès que les premières, alors $X+Y$ représente le nombre de succès en $n+n'$ épreuves identiques et indépendantes.

10.1.2 Additivité de deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, sont deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson,alors

$$X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P[(X=i)\cap(Y=k-i)] \\
&\quad \text{les événements étant incompatibles 2 à 2} \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \text{ car événements indépendants} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}.
\end{aligned}$$

or

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = (\lambda_1+\lambda_2)^k \text{ formule de Newton}$$

d'où

$$P(X+Y=k) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}.$$

10.1.3 Additivité de deux variables indépendantes normales

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors

$$X \pm Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

et

$$aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}).$$

Démonstration

La densité de probabilité de $X + Y$ est

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_2^2(x-t-\mu_1)^2+\sigma_1^2(t-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}} dt. \end{aligned}$$

Ensuite, le polynôme $\sigma_2^2(x-t-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(t-\mu_2)^2$ de degré deux en t est mis sous forme canonique :

$$\sigma_2^2(x-t-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(t-\mu_2)^2 =$$
$$(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\left[t - \frac{\sigma_2^2(x-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(x-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[t-\frac{\sigma_2^2(x-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right]^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}. \end{aligned}$$

Et, le résultat demandé est ainsi prouvé.

10.2 Fonctions non linéaires de variables aléatoires

10.2.1 La loi de "Khi-deux" $X \sim \chi^2_\nu$

Elle a été découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857-1936) qui travailla également sur les problèmes de régression avec le généticien Sir Francis Galton. La loi de Pearson ou loi du khi-deux (χ^2) est importante, non pas, comme les lois précédemment étudiées, pour la représentation de séries statistiques observées, mais en raison du rôle qu'elle joue dans les tests statistiques, notamment dans le test de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution observée, le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon. Ce sont les test du khi-deux.

Définition 77 Soit X_1, X_2, $\ldots$, X_i, $\ldots$, X_ν ν variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.
La variable aléatoire X définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

admet une loi de probabilité désignée par χ^2 et appelée "Khi-deux" (ou "Khi-carré") à ν degrés de liberté.

Le seul paramètre de la loi χ^2 est le nombre de degrés de liberté désigné par ν. C'est le nombre de variables aléatoires indépendantes qui interviennent dans la définition de χ^2.

Notation On note $X \sim \chi^2_\nu$.

Remarque 78 *Si $\nu = 1$ la variable χ^2 correspond au carré d'une variable normale centrée réduite de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$

La variable aléatoire $X \sim \chi^2_\nu$ varie entre 0 et l'infinie et a pour densité de probabilité :

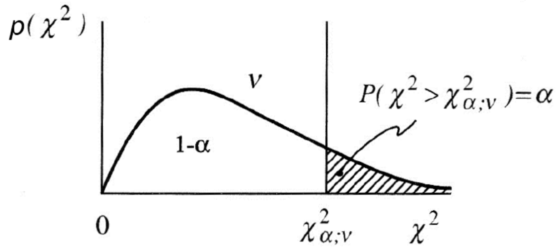
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ c_\nu x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

c_ν étant une constante positive dépendant de ν, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
On peut trouver une tabulation de la fonction inverse de la fonction de répartition de cette loi dans la Table 7 (en annexe, qui donne la valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée) ; ou sur un logiciel tableur :

$$\alpha \sim \chi^2_{\alpha,\nu} \quad \text{(Fonction KHIDEUX.inverse}(\alpha, \nu, 1)),$$
$$\text{ou CHIINV(probability ;deg\_freedom)}$$

c'est-à-dire la valeur de $\chi^2_{\alpha,\nu}$ telle que $P(\chi^2(\nu) > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha$.

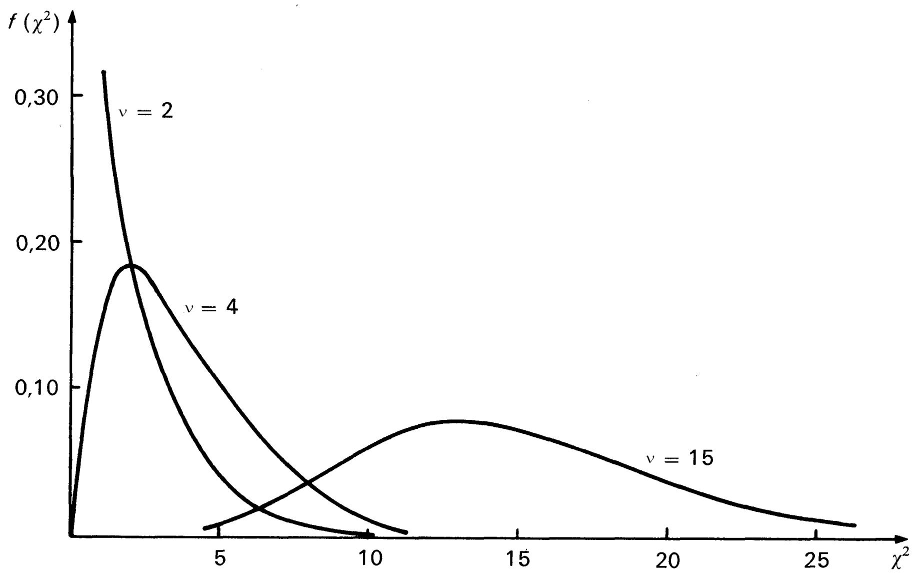
Exemple 10.2.1 Pour $\alpha = 0.90$ et $\nu = 5$, $\chi^2_\alpha = 1.610 = \chi^2_{0.90;5}$.



La table 8 (en annexe) et la fonction KHIDEU($k, \nu, 1$)(or CHIDIST(x,deg_freedom)) d'un logiciel tableur donnent la fonction de répartition $F(\chi^2) = P(X \leq \chi^2)$.

Forme

La distribution du χ^2 est dissymétrique avec étalement vers la droite. Toutefois, elle tend à devenir symétrique lorsque le nombre ν de degrés de liberté augmente.



Forme de la loi du χ^2 suivant le nombre ν de degrés de liberté

Paramètres descriptifs

$$E(X) = \nu, \quad Var(X) = 2\nu.$$

Somme de deux variables qui suivent une loi du χ^2

Considérons $m + n$ variables gaussiennes réduites indépendantes X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n. Les variables aléatoires $X = X_1^2 + \ldots + X_m^2$ et $Y = Y_1^2 + \ldots + Y_n^2$ sont indépendantes et obéissent respectivement aux lois se Pearson à m et n degrés de liberté. Leur somme

$$X_1^2 + \ldots + X_m^2 + Y_1^2 + \ldots + Y_m^2$$

obéit à la loi de χ^2 à $m + n$ degrés de libertés.

Définition 79 Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes obéissant respectivement aux lois de Pearson à m et n degrés de liberté ; leur somme $X + Y$ obéit à la loi de Pearson à $m + n$ degrés à liberté :

$$X \sim \chi_n^2, Y \sim \chi_m^2 \Rightarrow X + Y \sim \chi_{n+m}^2.$$

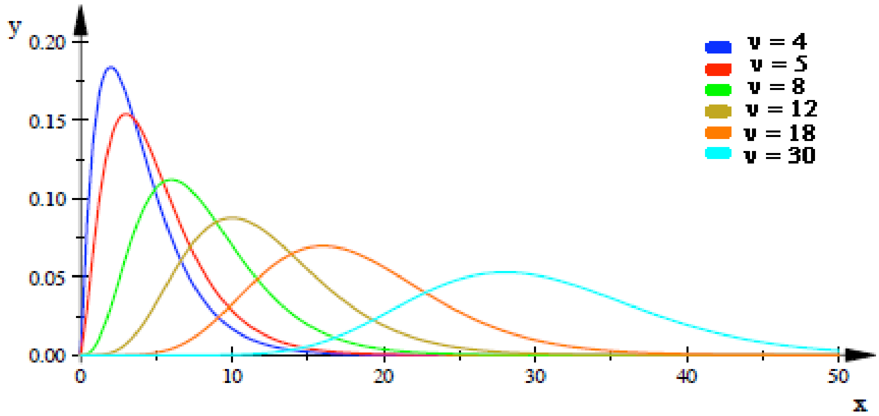
Respectivement pour la soustraction on a :

Si $X \sim \chi^2_n$ et $Y \sim \chi^2_m$ sont indépendantes, alors

$$X - Y \sim \chi^2_{n-m}\ (n > m)$$

Approximation par une loi normale

A mesure que ν augmente, la loi du χ^2 tend vers la loi normale, comme on peut constater sur le graphique ci-dessous.



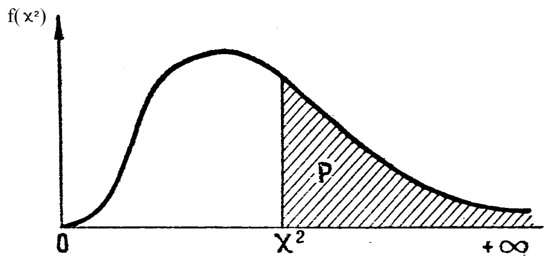
Densité de χ^2 pour $\nu = 4, 5, 8, 12, 18, 30$.

En pratique, on peut considérer que pour $\nu \geq 30$, on peut remplacer la loi du χ^2 à ν degrés de liberté par la loi normale $\mathcal{N}(\nu, \sqrt{2\nu})$.

Utilisation de la table de Pearson

La distribution de χ^2 ne dépendant que d'un seul paramètre ν, le nombre de degrés de liberté, la Table 7 que l'on trouvera en annexe est à double entrée (ν et P). Elle donne pour ν inférieur ou égal à 30, la valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$



Interprétation de la Table 7 de la distribution de χ^2.

Donc, suivant le nombre ν de degrés de liberté, la Table 7 nous donne la valeur de χ^2 telle que

$$P(X \geq x) = \alpha \Leftrightarrow P(X < x) = 1 - \alpha$$

Exemple 10.2.2 [3] Pour $n = 7$, la valeur de χ^2 a une probabilité de 90 % d'être supérieure à 2,83 et une probabilité de 5 % d'être supérieure à 14,07.

Exemple 10.2.3 [3] Soit la variable aléatoire $X \sim \chi^2_1$. Déterminer les valeurs de x de cette variable pour lesquelles :

$$P(X \geq x) = 0.05, \quad P(X \geq x) = 0.01$$

Solution : De la Table 7 on lit à ligne $\nu = 1$ et la colonne $P = 0.05$ que $x = 3.841$; à la ligne $\nu = 1$ et la colonne $P = 0.01$ on obtient $x = 6.635$.

Cette disposition de la table est bien adapté au test de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution observée.

Calcul de probabilités

Comme pour toutes les variables d'usage courant, les fonctions de répartitions des variables χ^2_ν sont tabulées.

Soit la relation $F(u) = P(\chi^2_\nu < u) = p$. La Table 8 de l'annexe donne, pour un certain nombre de valeurs p, u en fonction de ν.

Exemple 10.2.4 Utilisation de table 7 et table 8 de l'annexe

- Soit une variable $Y = \chi^2_4$. On a

$$P(0.484 < Y < 11.143) = F(11.143) - F(0.484) = 0.975 - 0.025 = 95\%$$

- Soit une variable $Z = \chi^2_{10}$. On a

$$P(Z \geq 18.307) = 1 - P(Z < 18.307) = 1 - F(18.307) = 1 - 0.95 = 5\%$$

Ou bien si on utilise table 7 on a directement

$$P(Z \geq 18.307) = 0.05 = 5\%.$$

On remarquera que, la densité d'une variable χ^2_ν étant nulle en zéro et à gauche de zéro, on a :

$$F(u) = 0, \quad \text{si } u \leq 0$$
$$F(u) = P(\chi^2_\nu < u) = P(0 < \chi^2_\nu < u), \quad \text{si } u > 0$$

On remarquera également que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et si $Y = X^2 \sim \chi^2_1$, on a :

$$P(Y < u) = P(X^2 < u) = P(-\sqrt{u} < X < \sqrt{u}), u > 0$$

En particulier on pourra vérifier :

$$P(-1.960 < X < 1.960) = P(Y < (1.960)^2) = P(Y < 3.841) = 95\%$$
$$P(-2.576 < X < 2.576) = P(Y < (2.576)^2) = P(Y < 6.635) = 99\%$$

10.2.2 La loi "t-de Student" $T \sim T_n$

La loi de Student (ou loi de Student-Fisher) est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon (Test de Student). Student est le pseudonyme du statisticien anglais William Gosset qui travaillait comme conseiller à la brasserie Guinness et qui publia en 1908 sous ce nom, une étude portant sur cette variable aléatoire.

Définition 80 *Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et Y une variable aléatoire suivant une loi de "Khi-deux" à n degrés de liberté : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. X et Y étant indépendantes, on dit que la variable aléatoire T_n définie par*

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$$

admet une distribution de "Student" à n degrés de liberté.

Notation : $T \sim T_n$

Densité de probabilité

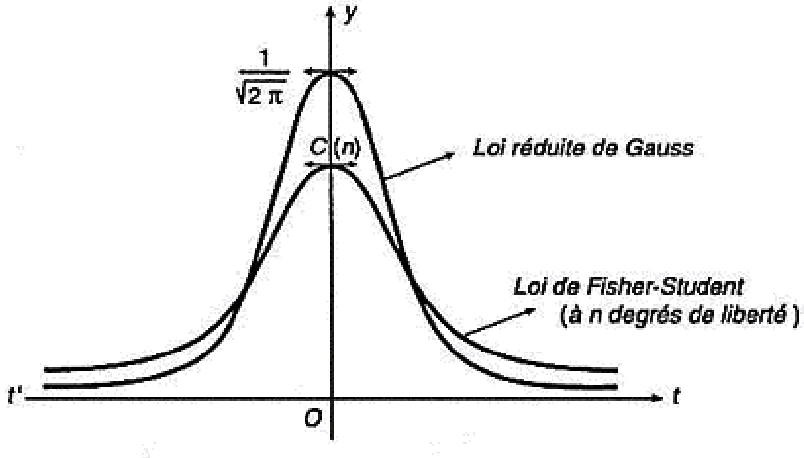
La fonction densité de probabilité $f(t)$ d'une variable $T \sim T_n$ a pour expression

$$f(t) : t \to C(n)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

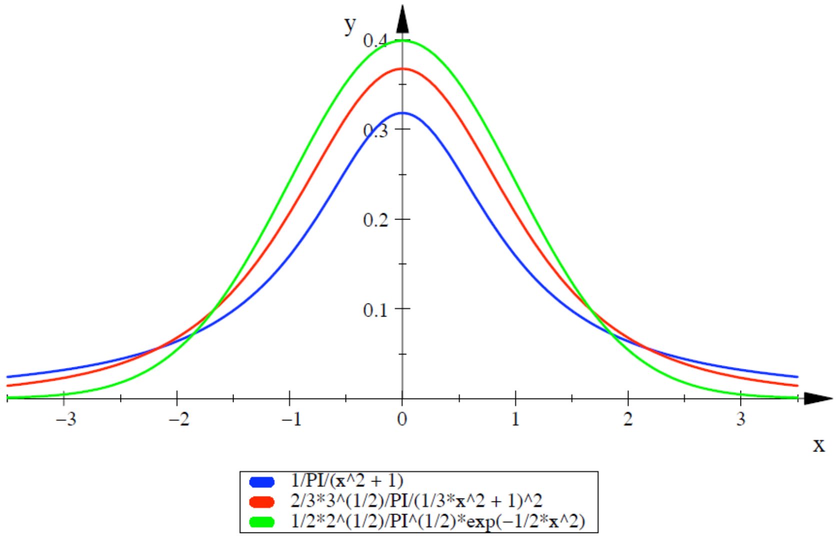
où $C(n)$ est une constante positive dépendant de n et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Forme de la distribution

L'étude des variations de la densité d'une variable T_n montre que la distribution est en cloche, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et un peut plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Elle admet pour mode : 0.



Elle ne dépend que de la valeur n qui est son nombre de degrés de liberté. Plus le nombre de degrés de liberté augmente, et plus la distribution d'une variable T_n est resserrée autour de l'origine.



Paramètres descriptifs

L'espérance de la variable de Student est :

$$E(T_n) = 0 \quad \text{si} \quad n > 1$$

la variance de la variable de Student est :

$$Var(T_n) = \frac{n}{n-2} \quad \text{si} \quad n > 2$$

Approximation par la loi normale

Comme la distribution d'une variable T_n de Student est un peut plus aplatie que la distribution normale centrée réduite, alors la distribution d'une variable T_n, de Student, est toujours plus dispersée que celle d'une variable normale centrée réduite. Cependant a mesure que n augmente, la distribution de Student à n degrés de liberté se rapproche de plus en plus de celle de la loi normale centrée réduite. On constate dans les tables de valeurs numérique que la différence entre une loi de Student et une loi normale centrée réduite est, en ce qui concerne le calcul des probabilités, peu sensible lorsque $n = 30$, presque négligeable lorsque $n = 120$.

En pratique : si $T \sim T_n$ pour $n \geq 30$, on pourra écrire que $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Calcul des probabilités

On peut trouver la fonction de répartition de cette loi sur un logiciel tableur :

Fonction de répartition :	Loi.student(t,ν,1) (TDIST(x,deg_freedom,tails))
Inverse de la fonction de répartition :	Loi.student.inverse(α, ν) (TINV(probability,deg_freedom)

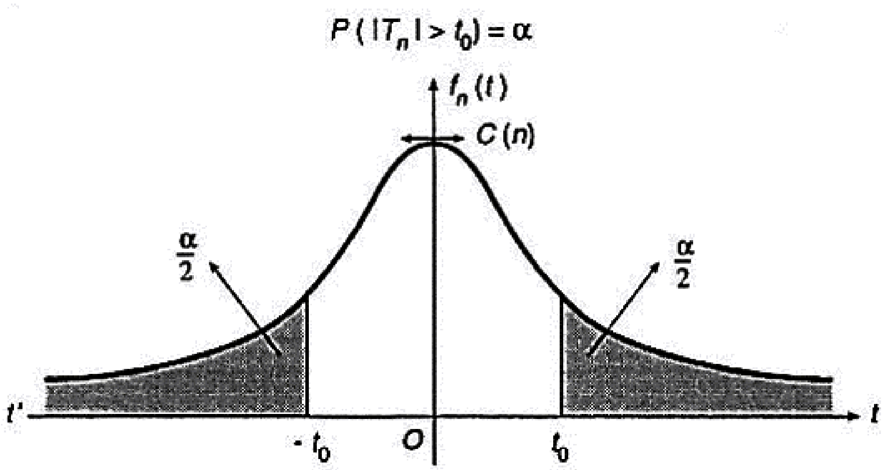
Utilisation de la table de Student

Les valeurs tabulées de la variable T_n dépendent d'un seuil α que l'on peut choisir et du nombre de degré de liberté n.

- La Table 9 en annexe

  La Table 9 donne la valeur $t_{\alpha,n}$ définie par $P(|T| > t_{\alpha,n}) = \alpha$.

$$f(t) = C(n)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



La table donne la probabilité α pour que T égale ou dépasse une valeur donnée t_0 en valeur absolue, en fonction du degré de liberté (d.d.l.) n.

Exemple 10.2.5 : avec d.d.l. $n = 3$ pour $t_0 = 2.353$, de la Table 9. la probabilité $\alpha = 0.10$.

- La Table 10. donne la valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée.

Exemple 10.2.6 – Pour $n = 11$, on a $P(T_n < 1.796) = 1 - P(T_n > 1.796)$. Pour d.d.l. $n = 11$ et $\alpha = 1.796$ la Table 10. donne $p = 0.05 \Longrightarrow$

$$P(T_n < 1.796) = 1 - P(T_n > 1.796) = 1 - 0.05 = 0.95 = 95\%.$$

– Pour d.d.l. $n = 11$ de la Table 10. on trouve la probabilité $P(T_n < 2.201)$ comme suit : Pour d.d.l. $n = 11$ et $\alpha = 2.201$ la Table 10. donne $p = 0.025$, alors

$$P(T_n < 2.201) = 1 - P(T_n > 2.201) = 1 - 0.025 = 0.975 = 97.5\%$$

- La Table 11. Soit $F_n(u) = P(T_n < u) = p$.
  La table Table 11. permet d'obtenir u, pour certaines valeurs de p, selon le nombre de degrés de liberté de la variable de Student.
  A cause de la symétrie par rapport à l'origine, la table n'est construite que pour des valeurs u positives.
  Pour $u < 0$, on a, comme pour la loi normale centré réduite :

$$P(T_n < u) = P(T_n > -u) = 1 - P(T_n \leq -u) = 1 - F(-u).$$

Exemple 10.2.7 – Pour $n = 11$, on a : $P(T_n < 0.540) = 70\%$; $P(T_n < 1.796) = 95\%$; $P(T_n < 2.201) = 97.5\%$

– Pour $n = 16$, on a : $P(T_n < 0.691) = 75\%$; $P(T_n < -0.691) = P(T_n > 0.691) = 25\%$

– Pour $n = 25$, on a :

$$\begin{aligned} P(|T_n| < 2.060) &= P(2.060 < T_n < 2.060) \\ &= F(2.060) - F(-2.060) \\ &= F(2.060 - [1 - F(2.060)] \\ &= 2F(2.060) - 1 \\ &= 2 \times 0.975 - 1 \\ &= 95\% \end{aligned}$$

Si on utilise la Table 9. qui donne $P(|T_n| > t_0) = \alpha$, on a : $n = 25$,

$$P(|T_n| < 2.060) = 1 - P(|T_n| > 2.060)$$

pour $t_0 = 2.060$ et d.d.l. $n = 25$ de la Table 9. la probabilité $\alpha = 0.05$, alors

$$\begin{aligned} P(|T_n| < 2.060) &= 1 - P(|T_n| > 2.060) \\ &= 1 - 0.05 = 0.95 = 95\% \end{aligned}$$

Test sur le chapitre : Fonctions de variables aléatoires

1. Loi de Khi deux, utilisation.

2. Loi de Student, utilisation.

Schémas

Événements

au moins	$\geq$	plus de	$>$
moins de	$<$	au plus	$\leq$

A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A et B compatibles	$A \cap B \neq \emptyset$

Combinatoire

	sans répétition	avec répétition
A Arrangements choix, ordre	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\bar{A}_n^p = n^p$
P Permutations ordre	$P_n = n!$	$\bar{P}_p^{p_1 p_2 \ldots p_n} = \frac{p!}{p_1! p_2! \ldots p_n!}$
C Combinaisons choix	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$

Probabilités

loi de multiplication	
A et B indépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
A et B dépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B \mid A)$
loi d'addition	
A et B incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A et B compatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Modèle d'urne

Types de tirages	**Ordre**	**Répétitions d'éléments**	**Dénombrement**
Successifs avec remise	ordonné	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$\bar{A}_n^p = n^p$
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Simultanés	sans ordre		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Cas possibles lors des différents modes de tirages

mode de tirage	non exhaustif	exhaustif
successif avec remise	$\bar{A}_n^p = n^p$	$\bar{A}_n^n = n^n$
successif sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_n^n = P_n = n!$
simultané	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$	1

Urne contenant deux sortes de boules :
N_1 boules de type A ; N_2 de type B ; $N_1 + N_2 = N$, $p = \frac{N_1}{N}$
L'événement $E_k =$ "prélever k boules du type A parmi les n tirées"
Probabilité de l'événement E_k :

	successif avec remise	successif sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	——
choix d'éléments	$p^k(1-p)^{n-k}$	$\frac{A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$
$P(E_k)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$

Urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes

N_i le nombre de boules de la couleur i ;

$p_i = \frac{N_i}{N}$ proportion de boules de la couleur i dans l'urne ; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

$A(n_1, \ldots, n_k)$ - l'événement de tirer n boules, dont exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,…, et n_k boules de la couleur k.

Probabilité de l'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$ **:**

	successif avec remise	successif sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	——
choix d'éléments	$p_1^{n_1}.p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$	$\frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1}.C_{N_2}^{n_2} \ldots C^{n_k} N_k}{C_N^n}$
$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k))$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} p_1^{n_1}.p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$

Choix de la loi discrete pour une variable aléatoire

Conditions d'application : 2 issues possibles de probabilité p pour le succès

Nombre de tirages	Mode de tirage	Définition de la variable aléatoire X	Loi
1	———	Nombre de succès	Bernoulli $B(1, p)$
$n > 1$	avec remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
		Nombre de tirages pour le I succès	Géometrique $\mathcal{G}(p)$
		Nombre de succès dans l'intervalle t	Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda = p * t$
	sans remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Hypergéometrique $\mathcal{H}(N, n, p)$

Lois usuelles discrètes

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
Lois usuelles discrètes finies				
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$	$P(X = k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Lois usuelles discrètes infinies				
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal $\mathcal{R}(r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; k \geq r\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r\, q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; r \leq k \leq N - M + r\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{r-1} \times \binom{N-M}{k-r}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M-r+1}{N-k+1}$	$r\frac{N+1}{M+1}$	$rq\frac{N(N+1)(M-r+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Binômiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r\, q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Lois usuelles continues

Loi	**Notation**	**Ensemble image** V de X	Densité de probabilité $f(x)$	Fonction de répartition $F(X)$	Moyenne μ	Variance σ^2
Uniforme	$X \sim \mathcal{U}[a;b]$	$[a;b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Laplace - Gauss	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	μ	σ^2
Normale centrée réduite	$X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	0	1
Khi-deux	$X \sim \chi^2_\nu$ $= \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$	$\mathbb{R}$ $X \sim \mathbb{N}(0,1)$		Table de χ^2_ν	ν	2ν
Student	$T \sim T_n$ $= \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $Y \sim \chi^2_n$	$\mathbb{R}$		Table de T_n	0	$\frac{n}{n-2}$

Additivité

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$**,** $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$**, indépendantes** $\to X + Y \sim \mathcal{B}(n+n',p)$.

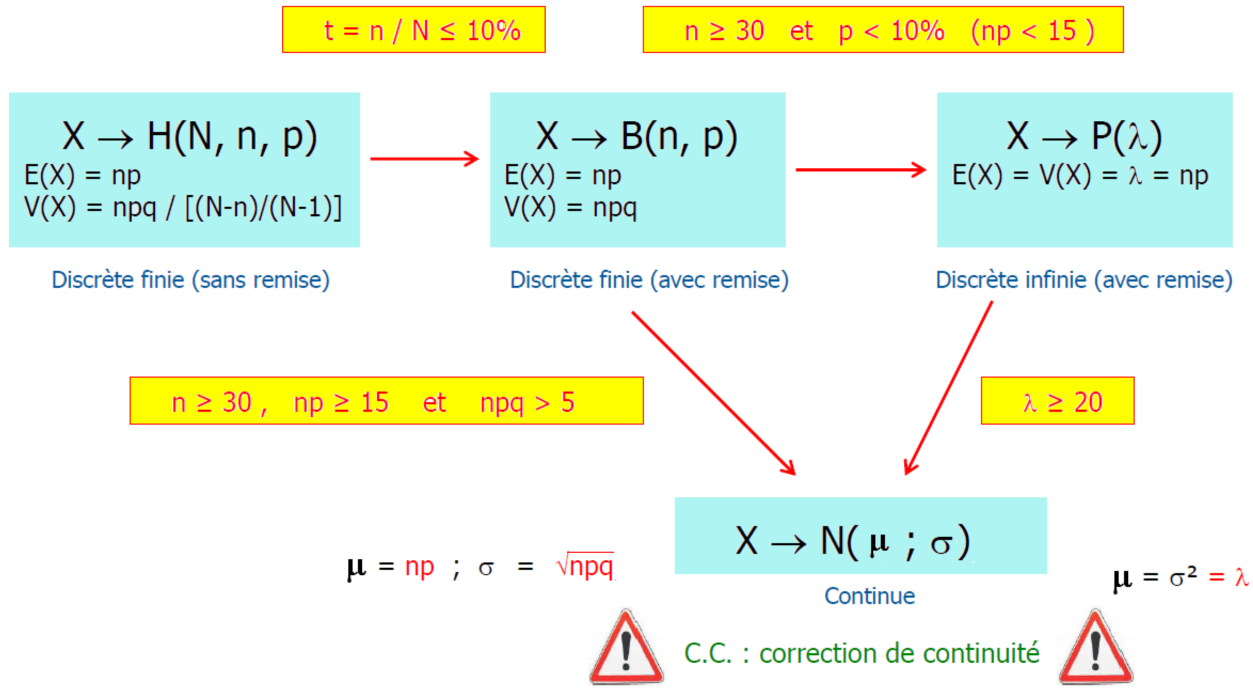
$X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$**,** $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, **indépendantes** $\to X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ **,** $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, **indépendantes,** $a, b \in \mathbb{R} \to$

$$aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}).$$

$X \sim \chi^2_n$**,** $Y \sim \chi^2_m$**, indépendantes** $\to X \pm Y \sim \chi^2_{n\pm+m}$ $(n > m)$.

Convergence en loi



Pour $\nu \geq 30$ $X \sim \chi^2_\nu \to \mathcal{N}(\nu, \sqrt{2\nu})$.
Pour $n \geq 30$ $T \sim T_n \to \mathcal{N}(0, 1)$.

Bibliographie

[1] Anderson, Sweeney et Williams. *Statistiques pour l'économie et la gestion*, 2010, De Boeck, Bruxelles

[2] Banks, J., et Meikes, R.G. *Handbook of Tables and Graphs for the Industrial Engineer and Manager*, 1984, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.

[3] B. Belletante, B. Romier *Mathématiques et gestion. Lest outils fondamentaux.* Ellipses, Paris, 1991.

[4] Berrondo-Agrell Marie et Fourastie Jacqueline. *Pour comprendre les probabilités*, 1994, Paris, Hachette, "Les Fondamentaux".

[5] Bouget D. et Vienot A. *Traitement de l'information : statistiques et probabilités*, 1995, Vuibert, Paris.

[6] Burington, R.S., et May, D.C. *Handbook of Probability and Statistics with Tables*, 1970. 2e éd., New York, McGraw-Hill Book Company.

[7] Calot G. *Cours de calcul de probabilités*, 1989, Dunod, Paris

[8] Giard V. *Statistique appliquée à la gestion*, 1995, Economica, Paris.

[9] Delsart V. et Vaneecloo N. *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*, 2010 PU du Septemtrion, Lille.

[10] Droesbeke J-J. *Éléments de statistique*, 1997, Ellipses , Bruxelles.

[11] Dumoulin D. *Mathématiques de gestion. Cours et applications.* Economica, Paris, 1987.

[12] Grais B. *La statistique et l'intreprise. Les techniques statistiques, tome 2 : Les instruments d'analyse.* Economica, Paris, 1987.

[13] Hoel P. *Statistique mathématique.* Armand Colin, Paris, 1984.

[14] Jaffard P. *Initiation aux meéthodes de la statistique et du calcul des probabilités.* Masson, Paris, 1990.

[15] Justens D. *Statistique pour décideurs*, 1990, De Boeck, Bruxelles.

[16] Lecoutre J.-P. *Statistique et probabilités*, 2000, Dunod, Paris.

[17] Lipschitz, Seymour. *Probabilité. Cours et problèmes*, 1993, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[18] Micula S. *Probability and statistics for computational sciences.* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[19] Saporta, Gilbert. *Probabilité, analyse des données et statistique*, 2006, Paris, éditions Technip.

[20] Spiegel, Murray R. *Probabilité et statistique. Cours et problèmes*, 1981, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[21] Vekermans D. *Probabilité et statistique.* `http://vekemans.free.fr/Proba.pdf`

[22] Wonnacott, Thomas H. et Wonnacott, Ronald J. *Statistique*, 1991, éditions Econimica.

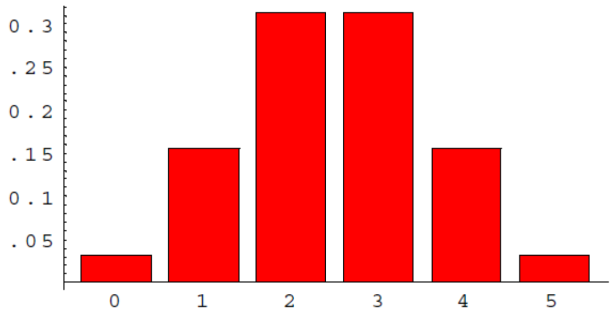
Annexe

Tables statistiques

Table 1. Distribution binomiale

Cette table donne la probabilité d'obtenir k succès en n tirages étant donné une probabilité p de succès sur un tirage.
Exemple : la probabilité d'obtenir 1 succès sur 5 tirages à pile ou face est de 0,1563.

$$\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k (1 - p)^{n-r}}$$



		p									
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

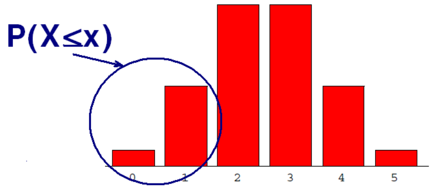
					p						
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

n	k	p: 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052

						p					
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 2. Fonction de répartition binomiale

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$



		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
2	0	.903	.810	.772	.640	.563	.490	.423	.360	.303	.250
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.878	.840	.798	.750
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.275	.216	.166	.125
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.718	.648	.575	.500
	2	1.000	.999	.997	.992	.984	.973	.957	.936	.909	.875
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.179	.130	.092	.063
	1	.986	.948	.890	.819	.738	.652	.563	.475	.391	.313
	2	1.000	.996	.988	.973	.949	.916	.874	.821	.759	.687
	3		1.000	.999	.998	.996	.992	.985	.974	.959	.938
5	0	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.116	.078	.050	.031
	1	.977	.919	.835	.737	.633	.528	.428	.337	.256	.188
	2	.999	.991	.973	.942	.896	.837	.765	.683	.593	.500
	3	1.000	1.000	.998	.993	.984	.969	.946	.913	.869	.813
	4			1.000	1.000	.999	.998	.995	.990	.982	.969
6	0	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.075	.047	.028	.016
	1	.967	.886	.776	.655	.534	.420	.319	.233	.164	.109
	2	.998	.984	.953	.901	.831	.744	.647	.544	.442	.344
	3	1.000	.999	.994	.983	.962	.930	.883	.821	.745	.656
	4		1.000	1.000	.998	.995	.989	.978	.959	.931	.891
	5				1.000	1.000	.999	.998	.996	.992	.984
7	0	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.049	.028	.015	.008
	1	.956	.850	.717	.577	.445	.329	.234	.159	.102	.063
	2	.996	.974	.926	.852	.756	.647	.532	.420	.316	.227
	3	1.000	.997	.988	.967	.929	.874	.800	.710	.608	.500
	4		1.000	.999	.995	.987	.971	.944	.904	.847	.773
	5			1.000	1.000	.999	.996	.991	.981	.964	.938
	6					1.000	1.000	.999	.998	.996	.992
8	0	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.032	.017	.008	.004
	1	.943	.813	.657	.503	.367	.255	.169	.106	.063	.035
	2	.994	.962	.895	.797	.679	.552	.428	.315	.220	.145
	3	1.000	.995	.979	.944	.886	.806	.706	.594	.477	.363
	4		1.000	.997	.990	.973	.942	.894	.826	.740	.637
	5			1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.912	.855
	6				1.000	1.000	.999	.996	.991	.982	.965
	7						1.000	1.000	.999	.998	.996
9	0	.630	.387	.232	.134	.075	.040	.021	.010	.005	.002
	1	.929	.775	.599	.436	.300	.196	.121	.071	.039	.020
	2	.992	.947	.859	.738	.601	.463	.337	.232	.150	.090
	3	.999	.992	.966	.914	.834	.730	.609	.483	.361	.254
	4	1.000	.999	.994	.980	.951	.901	.828	.733	.621	.500
	5		1.000	.999	.997	.990	.975	.946	.901	.834	.746
	6			1.000	1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.910
	7					1.000	1.000	.999	.996	.991	.980
	8							1.000	1.000	.999	.998
10	0	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.013	.006	.003	.001
	1	.914	.736	.544	.376	.244	.149	.086	.046	.023	.011
	2	.988	.930	.820	.678	.526	.383	.262	.167	.100	.055
	3	.999	.987	.950	.879	.776	.650	.514	.382	.266	.172
	4	1.000	.998	.990	.967	.922	.850	.751	.633	.504	.377
	5		1.000	.999	.994	.980	.953	.905	.834	.738	.623
	6			1.000	.999	.996	.989	.974	.945	.898	.828
	7				1.000	1.000	.998	.995	.988	.973	.945
	8						1.000	.999	.998	.995	.989
	9							1.000	1.000	1.000	.999

n	X	p: .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.569	.314	.167	.086	.042	.020	.009	.004	.001	.000
	1	.898	.697	.492	.322	.197	.113	.061	.030	.014	.006
	2	.985	.910	.779	.617	.455	.313	.200	.119	.065	.033
	3	.998	.981	.931	.839	.713	.570	.426	.296	.191	.113
	4	1.000	.997	.984	.950	.885	.790	.668	.533	.397	.274
	5		1.000	.997	.988	.966	.922	.851	.753	.633	.500
	6			1.000	.998	.992	.978	.950	.901	.826	.726
	7				1.000	.999	.996	.988	.971	.939	.887
	8					1.000	.999	.998	.994	.985	.967
	9						1.000	1.000	.999	.998	.994
	10								1.000	1.000	1.000
12	0	.540	.282	.142	.069	.032	.014	.006	.002	.001	.000
	1	.882	.659	.443	.275	.158	.085	.042	.020	.008	.003
	2	.980	.889	.736	.558	.391	.253	.151	.083	.042	.019
	3	.998	.974	.908	.795	.649	.493	.347	.225	.134	.073
	4	1.000	.996	.976	.927	.842	.724	.583	.438	.304	.194
	5		.999	.995	.981	.946	.882	.787	.665	.527	.387
	6		1.000	.999	.996	.986	.961	.915	.842	.739	.613
	7			1.000	.999	.997	.991	.974	.943	.888	.806
	8				1.000	1.000	.998	.994	.985	.964	.927
	9						1.000	.999	.997	.992	.981
	10							1.000	1.000	.999	.997
	11									1.000	1.000
13	0	.513	.254	.121	.055	.024	.010	.004	.001	.000	.000
	1	.865	.621	.398	.234	.127	.064	.030	.013	.005	.002
	2	.975	.866	.692	.502	.333	.202	.113	.058	.027	.011
	3	.997	.966	.882	.747	.584	.421	.278	.169	.093	.046
	4	1.000	.994	.966	.901	.794	.654	.501	.353	.228	.133
	5		.999	.992	.970	.920	.835	.716	.574	.427	.291
	6		1.000	.999	.993	.976	.938	.871	.771	.644	.500
	7			1.000	.999	.994	.982	.954	.902	.821	.709
	8				1.000	.999	.996	.987	.968	.930	.867
	9					1.000	.999	.997	.992	.980	.954
	10						1.000	1.000	.999	.996	.989
	11								1.000	.999	.998
	12									1.000	1.000
14	0	.488	.229	.103	.044	.018	.007	.002	.001	.000	.000
	1	.847	.585	.357	.198	.101	.047	.021	.008	.003	.001
	2	.970	.842	.648	.448	.281	.161	.084	.040	.017	.006
	3	.996	.956	.853	.698	.521	.355	.220	.124	.063	.029
	4	1.000	.991	.953	.870	.742	.584	.423	.279	.167	.090
	5		.999	.988	.956	.888	.781	.641	.486	.337	.212
	6		1.000	.998	.988	.962	.907	.816	.692	.546	.395
	7			1.000	.998	.990	.969	.925	.850	.741	.605
	8				1.000	.998	.992	.976	.942	.881	.788
	9					1.000	.998	.994	.982	.957	.910
	10						1.000	.999	.996	.989	.971
	11							1.000	.999	.998	.994
	12								1.000	1.000	.999
	13										1.000

n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
						p					
15	0	.463	.206	.087	.035	.013	.005	.002	.000	.000	.000
	1	.829	.549	.319	.167	.080	.035	.014	.005	.002	.000
	2	.964	.816	.604	.398	.236	.127	.062	.027	.011	.004
	3	.995	.944	.823	.648	.461	.297	.173	.091	.042	.018
	4	.999	.987	.938	.836	.686	.515	.352	.217	.120	.059
	5	1.000	.998	.983	.939	.852	.722	.564	.403	.261	.151
	6		1.000	.996	.982	.943	.869	.755	.610	.452	.304
	7			.999	.996	.983	.950	.887	.787	.654	.500
	8			1.000	.999	.996	.985	.958	.905	.818	.696
	9				1.000	.999	.996	.988	.966	.923	.849
	10					1.000	.999	.997	.991	.975	.941
	11						1.000	1.000	.998	.994	.982
	12								1.000	.999	.996
	13									1.000	1.000
16	0	.440	.185	.074	.028	.010	.003	.001	.000	.000	.000
	1	.811	.515	.284	.141	.063	.026	.010	.003	.001	.000
	2	.957	.789	.561	.352	.197	.099	.045	.018	.007	.002
	3	.993	.932	.790	.598	.405	.246	.134	.065	.028	.011
	4	.999	.983	.921	.798	.630	.450	.289	.167	.085	.038
	5	1.000	.997	.976	.918	.810	.660	.490	.329	.198	.105
	6		.999	.994	.973	.920	.825	.688	.527	.366	.227
	7		1.000	.999	.993	.973	.926	.841	.716	.563	.402
	8			1.000	.999	.993	.974	.933	.858	.744	.598
	9				1.000	.998	.993	.977	.942	.876	.773
	10					1.000	.998	.994	.981	.951	.895
	11						1.000	.999	.995	.985	.962
	12							1.000	.999	.997	.989
	13								1.000	.999	.998
	14									1.000	1.000
17	0	.418	.167	.063	.023	.008	.002	.001	.000	.000	.000
	1	.792	.482	.252	.118	.050	.019	.007	.002	.001	.000
	2	.950	.762	.520	.310	.164	.077	.033	.012	.004	.001
	3	.991	.917	.756	.549	.353	.202	.103	.046	.018	.006
	4	.999	.978	.901	.758	.574	.389	.235	.126	.060	.025
	5	1.000	.995	.968	.894	.765	.597	.420	.264	.147	.072
	6		.999	.992	.962	.893	.775	.619	.448	.290	.166
	7		1.000	.998	.989	.960	.895	.787	.641	.474	.315
	8			1.000	.997	.988	.960	.901	.801	.663	.500
	9				1.000	.997	.987	.962	.908	.817	.685
	10					.999	.997	.988	.965	.917	.834
	11					1.000	.999	.997	.989	.970	.928
	12						1.000	.999	.997	.991	.975
	13							1.000	1.000	.998	.994
	14									1.000	.999
	15										1.000

		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
18	0	.397	.150	.054	.018	.006	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.774	.450	.224	.099	.039	.014	.005	.001	.000	.000
	2	.942	.734	.480	.271	.135	.060	.024	.008	.003	.001
	3	.989	.902	.720	.501	.306	.165	.078	.033	.012	.004
	4	.998	.972	.879	.716	.519	.333	.189	.094	.041	.015
	5	1.000	.994	.958	.867	.717	.534	.355	.209	.108	.048
	6		.999	.988	.949	.861	.722	.549	.374	.226	.119
	7		1.000	.997	.984	.943	.859	.728	.563	.391	.240
	8			.999	.996	.981	.940	.861	.737	.578	.407
	9			1.000	.999	.995	.979	.940	.865	.747	.593
	10				1.000	.999	.994	.979	.942	.872	.760
	11					1.000	.999	.994	.980	.946	.881
	12						1.000	.999	.994	.982	.952
	13							1.000	.999	.995	.985
	14								1.000	.999	.996
	15									1.000	.999
	16										1.000
19	0	.377	.135	.046	.014	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.755	.420	.198	.083	.031	.010	.003	.001	.000	.000
	2	.933	.705	.441	.237	.111	.046	.017	.005	.002	.000
	3	.987	.885	.684	.455	.263	.133	.059	.023	.008	.002
	4	.998	.965	.856	.673	.465	.282	.150	.070	.028	.010
	5	1.000	.991	.946	.837	.668	.474	.297	.163	.078	.032
	6		.998	.984	.932	.825	.666	.481	.308	.173	.084
	7		1.000	.996	.977	.923	.818	.666	.488	.317	.180
	8			.999	.993	.971	.916	.815	.667	.494	.324
	9			1.000	.998	.991	.967	.913	.814	.671	.500
	10				1.000	.998	.989	.965	.912	.816	.676
	11					1.000	.997	.989	.965	.913	.820
	12						.999	.997	.988	.966	.916
	13						1.000	.999	.997	.989	.968
	14							1.000	.999	.997	.990
	15								1.000	.999	.998
	16									1.000	1.000
20	0	.358	.122	.039	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.736	.392	.176	.069	.024	.008	.002	.001	.000	.000
	2	.925	.677	.405	.206	.091	.035	.012	.004	.001	.000
	3	.984	.867	.648	.411	.225	.107	.044	.016	.005	.001
	4	.997	.957	.830	.630	.415	.238	.118	.051	.019	.006
	5	1.000	.989	.933	.804	.617	.416	.245	.126	.055	.021
	6		.998	.978	.913	.786	.608	.417	.250	.130	.058
	7		1.000	.994	.968	.898	.772	.601	.416	.252	.132
	8			.999	.990	.959	.887	.762	.596	.414	.252
	9			1.000	.997	.986	.952	.878	.755	.591	.412
	10				.999	.996	.983	.947	.872	.751	.588
	11				1.000	.999	.995	.980	.943	.869	.748
	12					1.000	.999	.994	.979	.942	.868
	13						1.000	.998	.994	.979	.942
	14							1.000	.998	.994	.979
	15								1.000	.998	.994
	16									1.000	.999
	17										1.000

Table 3. Distribution de Poisson

Fournit la probabilité $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

	λ									
x	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
x	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0540
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0344	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954

	λ									
x	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0093	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0163	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
x	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**	**6.9**	**7.0**
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0098	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**7.6**	**7.7**	**7.8**	**7.9**	**8.0**
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

	λ									
x	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.1060	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337

					λ					
x	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.000

					λ					
x	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

					λ					
x	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0018	0.0010	0.0005
8	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18	0.0145	0.0256	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446
26	0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164	0.0246	0.0343
27	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109	0.0173	0.0254
28	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070	0.0117	0.0181
29	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044	0.0077	0.0125
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026	0.0049	0.0083
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015	0.0030	0.0054
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009	0.0018	0.0034
33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0020
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0012
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
37	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
38	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Table 4. Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$\text{Fournit la probabilité } P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!} \text{pour } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

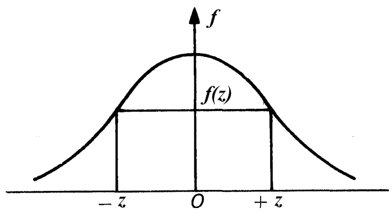
λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\lambda=$	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
$x=$ 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table 5. Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite

$$f(t) = f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1	0,333 2	0,312 3	0,289 7	0,266 1
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5	0,110 9	0,094 0	0,079 0	0,065 6
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5	0,013 6	0,010 4	0,007 9	0,006 0
3,	0,004 4	0,003 3	0,002 4	0,001 7	0,001 2	0,000 9	0,000 6	0,000 4	0,000 3	0,000 2

Exemples :

$$\begin{aligned} f(1.3) &= 0.1714 \\ f(-2.7) &= f(2.7) = 0.0104. \end{aligned}$$

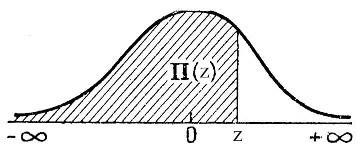


Table 6. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
Probabilité d'une valeur inférieure à t :
$$P(Z < t) = F(t) = \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz.$$
Pour $t < 0$, on a $P(Z < t) = 1 - \pi(-t)$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

Nota. — La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour z positif. Lorsque z est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1.37$ $\quad \pi(t) = 0.9147$
pour $t = -1.37$ $\quad \pi(t) = \pi(-1.37) = 1 - \pi(1.37) = 1 - 0.9147 = 0.0853.$

Table 6'. Fractiles de la Loi normale centrée réduite

$$U \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Pour $P < 0.5$ (colonne de gauche et ligne supérieure) les fractiles sont négatifs.

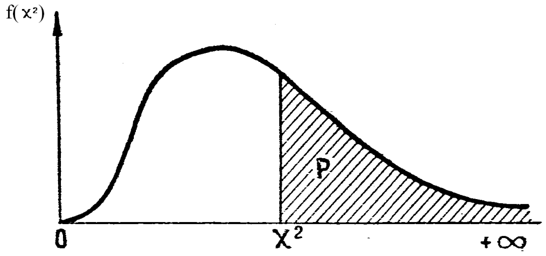
Pour $P > 0.5$ (colonne de droite et ligne inférieure) les fractiles sont positifs.

P	**0**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**	**0.006**	**0.007**	**0.008**	**0.009**	**0.01**	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

Exemples : $\pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340 \Longrightarrow u = 0.3425$;
$\pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020 \longrightarrow u = -0.2482$

Table 7. Distribution de χ^2 (Loi de K. Pearson)

Valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.



La table donne la fonction :

$$1 - F(\chi^2) = P(X \geq \chi^2) = P$$

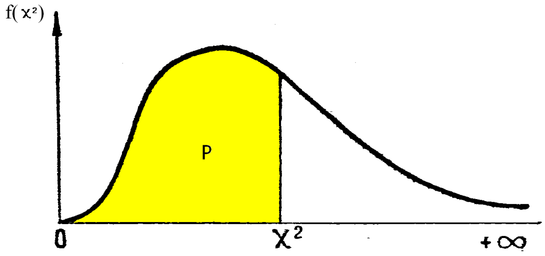
ν	$P = 0{,}90$	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Nota : ν est le nombre de degrés de liberté.
Pour ν supérieur à 30, on admet que la variable aléatoire est approximativement distribuée suivant la loi normale centrée réduite ($\mu = 0, \sigma = 1$).

Table 8. Fonction de répartition de la loi de χ^2.

Fonction de répartition $F(x) = P(X < x)$

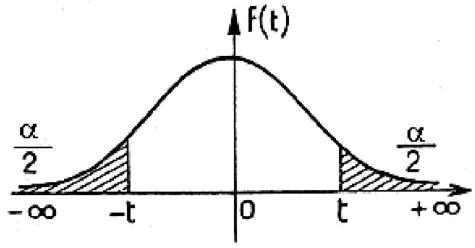
Si ν est le nombre de degrés de liberté d'une variable χ^2, si x est un nombre positif et si on pose : $F(x) = P(X < x) = P$. La table donne x pour différentes valeurs de ν et de P.



ν \ P	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.14	0.27	0.45	0.70	1.07	1.64	2.70	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	0.44	0.71	1.02	1.38	1.83	2.40	3.21	4.60	5.99	7.37	9.21
3	0.11	0.21	0.35	0.58	1.00	1.42	1.86	2.36	2.94	3.66	4.64	6.25	7.81	9.34	11.34
4	0.29	0.48	0.71	1.06	1.64	2.19	2.75	3.35	4.04	4.87	5.98	7.77	9.48	11.14	13.27
5	0.55	0.83	1.14	1.61	2.34	2.99	3.65	4.35	5.13	6.06	7.28	9.23	11.07	12.83	15.08
6	0.87	1.23	1.63	2.20	3.07	3.82	4.57	5.34	6.21	7.23	8.55	10.64	12.59	14.44	16.81
7	1.23	1.68	2.16	2.83	3.82	4.67	5.49	6.34	7.28	8.38	9.80	12.01	14.06	16.01	18.47
8	1.64	2.17	2.73	3.48	4.59	5.52	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.50	17.53	20.09
9	2.08	2.70	3.32	4.16	5.38	6.39	7.35	8.34	9.41	10.65	12.24	14.68	16.91	19.02	21.66
10	2.55	3.24	3.94	4.86	6.17	7.26	8.29	9.34	10.47	11.78	13.44	15.98	18.30	20.48	23.20
11	3.05	3.81	4.57	5.57	6.98	8.14	9.23	10.34	11.52	12.89	14.63	17.27	19.67	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.22	6.30	7.80	9.03	10.18	11.34	12.58	14.01	15.81	18.54	21.02	23.33	26.21
13	4.10	5.00	5.89	7.04	8.63	9.92	11.12	12.33	13.63	15.11	16.98	19.81	22.36	24.73	27.68
14	4.66	5.62	6.57	7.78	9.46	10.82	12.07	13.33	14.68	16.22	18.15	21.06	23.68	26.11	29.14
15	5.22	6.26	7.26	8.54	10.30	11.72	13.02	14.33	15.73	17.32	19.31	22.30	24.99	27.48	30.57
16	5.81	6.90	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.33	16.77	18.41	20.46	23.54	26.29	28.84	31.99
17	6.40	7.56	8.67	10.08	12.00	13.53	14.93	16.33	17.82	19.51	21.61	24.76	27.58	30.19	33.40
18	7.01	8.23	9.39	10.86	12.85	14.43	15.89	17.33	18.86	20.60	22.75	25.98	28.86	31.52	34.80
19	7.63	8.90	10.11	11.65	13.71	15.35	16.85	18.33	19.91	21.68	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	14.57	16.26	17.80	19.33	20.95	22.77	25.03	28.41	31.41	34.16	37.56
21	8.89	10.28	11.59	13.23	15.44	17.18	18.76	20.33	21.99	23.85	26.17	29.61	32.67	35.47	38.93
22	9.54	10.98	12.33	14.04	16.31	18.10	19.72	21.33	23.03	24.93	27.30	30.81	33.92	36.78	40.28
23	10.19	11.68	13.09	14.84	17.18	19.02	20.69	22.33	24.06	26.01	28.42	32.00	35.17	38.07	41.63
24	10.85	12.40	13.84	15.65	18.06	19.94	21.65	23.33	25.10	27.09	29.55	33.19	36.41	39.36	42.97
25	11.52	13.11	14.61	16.47	18.93	20.86	22.61	24.33	26.14	28.17	30.67	34.38	37.65	40.64	44.31
26	12.19	13.84	15.37	17.29	19.82	21.79	23.57	25.33	27.17	29.24	31.79	35.56	38.88	41.92	45.64
27	12.87	14.57	16.15	18.11	20.70	22.71	24.54	26.33	28.21	30.31	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.30	16.92	18.93	21.58	23.64	25.50	27.33	29.24	31.39	34.02	37.91	41.33	44.46	48.27
29	14.25	16.04	17.70	19.76	22.47	24.57	26.47	28.33	30.28	32.46	35.13	39.08	42.55	45.72	49.58
30	14.95	16.79	18.49	20.59	23.36	25.50	27.44	29.33	31.31	33.53	36.25	40.25	43.77	46.97	50.89
31	15.65	17.53	19.28	21.43	24.25	26.43	28.40	30.33	32.34	34.59	37.35	41.42	44.98	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	22.27	25.14	27.37	29.37	31.33	33.38	35.66	38.46	42.58	46.19	49.48	53.48
33	17.07	19.04	20.86	23.11	26.04	28.30	30.34	32.33	34.41	36.73	39.57	43.74	47.39	50.72	54.77
34	17.78	19.80	21.66	23.95	26.93	29.24	31.31	33.33	35.44	37.79	40.67	44.90	48.60	51.96	56.06
35	18.50	20.56	22.46	24.79	27.83	30.17	32.28	34.33	36.47	38.85	41.77	46.05	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.33	23.26	25.64	28.73	31.11	33.25	35.33	37.50	39.92	42.87	47.21	50.99	54.43	58.61
37	19.96	22.10	24.07	26.49	29.63	32.05	34.22	36.33	38.53	40.98	43.97	48.36	52.19	55.66	59.89
38	20.69	22.87	24.88	27.34	30.53	32.99	35.19	37.33	39.56	42.04	45.07	49.51	53.38	56.89	61.16
39	21.42	23.65	25.69	28.19	31.44	33.93	36.16	38.33	40.59	43.10	46.17	50.65	54.57	58.12	62.42
40	22.16	24.43	26.50	29.05	32.34	34.87	37.13	39.33	41.62	44.16	47.26	51.80	55.75	59.34	63.69
41	22.90	25.21	27.32	29.90	33.25	35.81	38.10	40.33	42.65	45.22	48.36	52.94	56.94	60.56	64.95
42	23.65	25.99	28.14	30.76	34.15	36.75	39.07	41.33	43.67	46.28	49.45	54.09	58.12	61.77	66.20
43	24.39	26.78	28.96	31.62	35.06	37.69	40.04	42.33	44.70	47.33	50.54	55.23	59.30	62.99	67.45
44	25.14	27.57	29.78	32.48	35.97	38.64	41.02	43.33	45.73	48.39	51.63	56.36	60.48	64.20	68.70
45	25.90	28.36	30.61	33.35	36.88	39.58	41.99	44.33	46.76	49.45	52.72	57.50	61.65	65.41	69.95
46	26.65	29.16	31.43	34.21	37.79	40.52	42.96	45.33	47.78	50.50	53.81	58.64	62.82	66.61	71.20
47	27.41	29.95	32.26	35.08	38.70	41.47	43.94	46.33	48.81	51.56	54.90	59.77	64.00	67.82	72.44
48	28.17	30.75	33.09	35.94	39.62	42.42	44.91	47.33	49.84	52.61	55.99	60.90	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	36.81	40.53	43.36	45.88	48.33	50.86	53.66	57.07	62.03	66.33	70.22	74.91
50	29.70	32.35	34.76	37.68	41.44	44.31	46.86	49.33	51.89	54.72	58.16	63.16	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.18	46.45	50.64	53.80	56.62	59.33	62.13	65.22	68.97	74.39	79.08	83.29	88.37
70	45.44	48.75	51.73	55.32	59.89	63.34	66.39	69.33	72.35	75.68	79.71	85.52	90.53	95.02	100.42
80	53.54	57.15	60.39	64.27	69.20	72.91	76.18	79.33	82.56	86.11	90.40	96.57	101.87	106.62	112.32
90	61.75	65.64	69.12	73.29	78.55	82.51	85.99	89.33	92.76	96.52	101.05	107.56	113.14	118.13	124.11
100	70.06	74.22	77.92	82.35	87.94	92.12	95.80	99.33	102.94	106.90	111.66	118.49	124.34	129.56	135.80
200	156.43	162.72	168.27	174.83	183.00	189.04	194.31	199.33	204.43	209.98	216.60	226.02	233.99	241.05	249.44

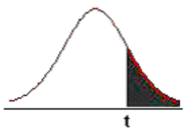
Table 9. Distribution T_n (Loi de Student)

Valeurs de T_n ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue : $P(|T_n| > t_0) = \alpha$.



n \ α	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Table 10. Distribution T_n (Loi de Student)



Valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée : $\boldsymbol{P(T_n > t_{n,\alpha}) = \alpha}$

n \ α	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

Table 11. Fonction de répartition de la loi de Student T_n

Soit T une variable de Student à ν degrés de liberté, de densité ρ. Si u est un nombre positif et si on pose :

$$\boldsymbol{F_n(u) = P(T < u) = p}$$

la table donne $\boldsymbol{u}$ pour différentes valeurs de $\boldsymbol{\nu}$ et de $\boldsymbol{p}$.

ν \ p	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.1270	0.2562	0.3900	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.1269	0.2560	0.3896	0.5309	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.1267	0.2556	0.3890	0.5300	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.1265	0.2550	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.6780	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.1260	0.2541	0.3866	0.5263	0.6772	0.8456	1.0424	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.1260	0.2540	0.3864	0.5261	0.6770	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
200	0.1258	0.2537	0.3859	0.5252	0.6757	0.8434	1.0391	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006

Ce manuel est composé d'après le programme en "Bases de la statistique – I partie" des spécialités Gestion et Economie de la filière de gestion à l'Université de Sofia "Sv. Kliment Ohridski". Le manuel encadre des notions de base et des thèmes de la théorie des probabilités : ensembles probabilistes, combinatoire, probabilité, variables aléatoires et leurs caractéristiques, fonctions de répartition et de distribution, paramètres, loi des grands nombres, théorème central limite.

L'objectif de ce manuel est d'enrichir les savoirs en mathématique avec la théorie des probabilités, indispensable pour l'apprentissage des méthodes des théories économiques contemporaines et en fin de compte la statistique appliquée, des étudiants. De réaliser des connaissances théoriques et des utiles pratiques pour déterminer des caractéristiques et les lois de distribution des variables aléatoires.

eISSN 2367-8666