3

IICT – BAS eISSN: 2367-8666

Lecture Notes in Computer Science and Technologies

Eléments de la théorie des probabilités

Manuel de travaux dirigés

Vera Angelova

eISBN: 978-954-91700-0-9

The series **Lectures Notes in Computer Science and Technologies of the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences** presents in an electronic format textbooks for undergraduate, graduate and PhD students studied various programs related to Informatics, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Communication Technologies, etc., as well as for all readers interested in these scientific disciplines. The Lecture Notes are based on courses taught by scientists of the Institute of Information and Communication Technologies - BAS in various Bulgarian universities and the Center for Doctoral Training in BAS. The published materials are with open access - they are freely available without any charge.

eISSN: 2367-8666

Avec la collaboration de madame Viviane Baligand et monsieur François Mimiague - Professeur à l'Université de Bordeaux IV, qui ont posé les basses de l'enseignement en Statistique au programme français de la Faculté de gestion et d'économie à l'Université de Sofia.

Table des matières

Chapitre 1

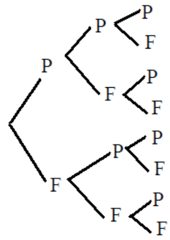
Algèbre des événements

1.1 Synthèse

• **Expérience aléatoire :** Une expérience aléatoire est une expérience qui a plusieurs résultats possibles mais dont l'issue ne peut être prévue avec certitude. Le résultat est dû au hasard. On peut cependant décrire tous les résultats possibles.

• **Univers, Ensemble fondamental :** L'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. Cet ensemble est appelé Ω.
Exemple
— Le lancer du dé est une expérience aléatoire . Son ensemble fondamental : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
— Le lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$
— La naissance d'un enfant : $\Omega = \{\text{Fille. Garçon}\}$
— Le lancer de 3 pièces de monnaie discernables :

$\Omega = \{(P, P, P), (P, P, F), (P, F, P), (P, F, F),$
$(F, P, P), (F, P, F), (F, F, P), (F, F, F)\}$
On peut représenter cette situation par un diagramme en arbre



— On lance un dé jusqu'à ce qu'on aie un 6 sur la face supérieure. On note le nombre de jets ainsi réalisés : $\Omega = \mathbb{N}$
— On lance une fléchette sur une cible ronde (sans marque). On note la distance au centre : $\Omega = [0, R]$: un ensemble infini de points.

• **Un événement** d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de Ω. Pour le caractériser, on exprime une condition qui le détermine ou on énumère ses éléments . Un événement est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à ce sous-ensemble.
Remarques :

- Certains événements sont particuliers : ce sont les événements Ω et $\emptyset$.

Ω est **l'événement certain**. Il est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire.

$\emptyset$ est **l'événement impossible** : il n'est jamais réalisé.
Dans le cas du lancer du dé : l'événement : "le résultat est positif" est un événement certain. l'événement : "le résultat est divisible par 7" est un événement impossible.

- **Un événement élémentaire** est un événement qui comporte un seul élément /éventualité/.

- **Opérations sur les événements**

Si nous considérons maintenant 2 événements : A et B, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\Omega \backslash A$ sont également des événements.
L'événement $A \cup B$ (A union B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à l'union des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A ou à B.
L'événement $A \cap B$ (A inter B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à l'intersection des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A et à B.
L'événement $A \backslash B$ (A moins B) est réalisé si le résultat de l'expérience appartient à la différence des ensembles A et B c'est à dire s'il appartient à A mais n'appartient pas à B.
L'événement $\Omega \backslash A = \bar{A}$ (Ω moins A ou A complémentaire) est réalisé ssi A n'est pas réalisé.
Les événements A et $\bar{A}$ sont appelés **événements contraires** ou aussi **événements complémentaires**.

Exemple
On lance un dé et on observe sa face supérieure. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A =$ Le résultat obtenu est pair $A = \{2, 4, 6\}$
$B =$ Le résultat obtenu est supérieur ou égal à 3 $B = \{3, 4, 5, 6\}$
$A \cup B =$ le résultat obtenu est pair ou supérieur ou égal à 3 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \cap B =$ le résultat obtenu est pair et supérieur ou égal à 3 $A \cap B = \{4, 6\}$
$A \backslash B =$ Le résultat obtenu est pair mais n'est pas supérieur ou égal à 3 $A \backslash B = \{2\}$
$\bar{A} =$ le résultat est impair $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

- Deux événements sont **contraires** ssi la réalisation de l'un équivaut à la non réalisation de l'autre. (c'est à dire : A est réalisé $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ n'est pas réalisé et $\bar{A}$ est réalisé $\Leftrightarrow$ A n'est pas réalisé)
2 événements contraires sont tels que $A \cup \bar{A} = \Omega$

- Deux événements sont **incompatibles** ssi la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre. (c'est à dire : A est réalisé $\Rightarrow$ B n'est pas réalisé et B est réalisé $\Rightarrow$ A n'est pas réalisé)
Les ensembles A et B sont alors disjoints.

- **Conséquence :** 2 événements contraires sont incompatibles, mais 2 événements incompatibles ne sont pas nécessairement contraires.

Exemple
On lance une pièce de monnaie 3 fois de suite

$\Omega = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,P),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$
Considérons les événements A : Le nombre de F est strictement supérieur au nombre de P
B : "Le nombre de F est strictement inférieur au nombre de P"
C : "Il y a exactement une F"
$A = \{(F,F,F),(F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)\}$
$B = \{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)\}$
$C = \{P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)\}$
Les événements A et B sont incompatibles $A \cap B = \emptyset$ et contraires $\bar{A} = B$: $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$
Les événements A et C sont incompatibles : $A \cap C = \emptyset$, mais non pas contraires, car $A \cup C \neq \Omega$.

Test sur le chapitre : Espace fondamentale et événements

Vocabulaire fondamental
1. Qu'est-ce que signifient les symboles : Ω, $\emptyset$, $\bar{A}$, $A \cup B$, $B \cap A$
2. Quelles conditions doit vérifier une expérience pour être expérience aléatoire ?
Donnez la définition d'une expérience aléatoire.
3. Donnez la définition de l'ensemble fondamental. Que peut-être-t-il ?
4. Décrivez l'événement ? Donnez un exemple pour le jet d'un dé.

Algèbre des événements
5. Quand dit-on que deux événements sont incompatibles ?
Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ le sont-ils ?
Visualisez les deux événements précédents.
6. Qu'est-ce que l'événement complémentaire ?
Donnez le contraire de l'événement $A =$ "toutes les boules choisies sont rouges".
7. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?
8. Ecrire l'ensemble fondamental (l'univers) de l'épreuve :

(a) Le lancer du dé

(b) Le lancer d'une monnaie

(c) Le lancer trois fois d'une pièce de monnaie

(d) La naissance d'un enfant

(e) Le lancer de trois pièces de monnaie

(f) On lance un dé jusqu'à ce qu'on aie un 6 sur la face supérieure. Ω est le nombre de jets ainsi réalisés

9. Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

(a) Seul A se réalise ;

(b) A et B se réalisent, mais pas C.

(c) les trois événements se réalisent ;

(d) au moins l'un des trois événements se réalise ;

(e) au moins deux des trois événements se réalisent ;

(f) aucun ne se réalise ;

(g) au plus l'un des trois se réalise ;

(h) exactement deux des trois se réalisent ;

(i) A ou B se réalisent, mais pas en même temps.

Explication : "moins de" = "$<$" ; "au moins" = "$\geq$" ;
"plus de" = "$>$" ; "au plus" = "$\leq$".

1.2 Problèmes

1. Déterminer l'Univers pour les expériences aléatoires suivantes :

Expérience aléatoire	**Observation**	**Univers**
a) Jeter une pièce de monnaie	coté visible	__________
b) Jeter un dé	point sur la face supérieure	__________
c) Jouer au football	résultat du match	__________
d) Sélectionner une pièce	conformité	__________
e) Tirer une carte d'un jeu	couleur "couleur" valeur	__________ __________ __________
f) Tirer une boule d'une urne avec des boules noires, blanches et rouges	couleur de la boule tirée	__________
g) Choisir une famille avec 3 enfants	sexe par âge croissant	__________
h Choisir une famille avec 3 enfants	sexe des enfants	__________

2. Jet d'une paire de dés. Donner une phrase désignant :

   a) un événement élémentaire ;

   b) un événement impossible ;

   c) deux événements incompatibles ;

d) un événement et son contraire.

3. On jette un dé et une pièce de monnaie une fois. Donner en extension les événements suivants :

   a) $A =$ ”Pile et un nombre paire arrivent”
   b) $B =$ ”Face et un nombre impaire arrivent”
   c) $C =$ ”Un nombre premier arrive”
   d) A et C se produisent simultanément
   e) Au moins l'un des événements A, B et C se produit.

4. On considère l'expérience aléatoire ”jet d'un dé”. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On désigne par A l'événement ”le point obtenu est impaire” ; par B l'événement ”le point obtenu est inférieur à 4”. Définir l'ensemble fondamentale et les événements suivants : a) A ; b) B ; c) $\bar{A}$; d) $\bar{B}$; e) $A \cap B$; f) $A \cup B$; g) $\bar{A} \cap \bar{B}$; h) $\bar{A} \cap B$; i) $\bar{A} \cup B$ et donner les éventualités de chacun de ces événements.

5. Les dix cartons représentés ci-dessous sont mélangés dans un sac. On tire un des cartons et on note le nombre figurant sur le carton.

259	**487**	**828**	**241**	**129**	**695**	**249**	**209**	**852**	**479**

   Quel est l'univers des possibles éventualités de cette expérience aléatoire ?
   Pour chacun des événements suivants, écrire la liste des éventualités :
   A : ”le nombre commence par 2” ; B : ”le nombre finit par 9” ; C : ”le nombre contient un 3” ; D : ”le nombre contient un 2 :; E : ”le nombre finit par 2” ; F : ”le nombre ne contient pas de 2” ; G : ”le nombre est compris entre 100 et 900 :; H : ”le nombre est compris entre 700 et 800.

   Définir par une phrase chacun des événements suivants : $B \cap D$; $B \cup D$; $\bar{B} \cap D$; $B \cup \bar{D}$.

   Ecrire à l'aide des événements définis, les événements suivants :
   I : ”le nombre commence par 2 et finit par 9” ; J : ”le nombre commence par 2 ou finit par 9” ; K : ”le nombre ne commence pas par 2 et ne finit pas par 9” ; L : ”le nombre ne commence pas par 2 ou ne finit pas par 9.

Algèbre des événements. Indications et résultats

1. a) $\Omega = \{F, P\}$;
b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
c) $\Omega = \{0 : 0; 0 : 1, 0 : 2, 0 : 3, \ldots, 1 : 0, 1 : 1, \ldots\}$;
d) $\Omega = \{$défectueuse, correcte$\}$;
e) couleur : $\Omega = \{$rouge, noire$\}$; ”couleur” : $\Omega = \{$ le trèfle $\clubsuit$, le carreau $\diamondsuit$, le cœur $\heartsuit$, le pique $\spadesuit\}$; valeur : $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, A, J, D, K\}$;

f) $\Omega = \{n, b, r\}$;
g) $\Omega = \bar{A}_2^3 = 2^3 = 8 = \{(ggg), (ggf), (gfg), (fgg), (gff), (fgf), (ffg), (fff)\}$

2. a) "la somme des deux dés est égale à 2" ;
b) "la somme des deux dés est égale à 13" ;
c) "la somme des deux dés est paire" et "la somme des deux dés est égale à 5" ;
d) "la somme des deux dés est paire" et "la somme des deux dés est impaire.

3. $\Omega = \{(P,1), (P,2), \ldots, (P,6), (F,1), (F,2), \ldots, (F,6)\}$
a) $A = \{(P,2), (P,4), (P,6)\}$; b) $B = \{(F,1), (F,3), (F,5)\}$
c) $C = \{(P,1), (P,2), (P,3), (P,5), (F,1), (F,2), (F,3), (F,5)\}$
d) $A \cap C = \{(P,2)\}$
e) $A \cup B \cup C = \{(P,1), (P,2), (P,3), (P,4), (P,5), (P,6), (F,1), (F,2), (F,3), (F,5)\}$

4. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
a) $A = \{1, 3, 5\}$;
b) $B = \{1, 2, 3\}$;
c) $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$;
d) $\bar{B} = \{4, 5, 6\}$;
e) $A \cap B = \{1, 3\}$;
f) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$;
g) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{4, 6\}$;
h) $\bar{A} \cap B = \{2\}$;
i) $\bar{A} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

5. $\Omega = \{259, 487, 828, 241, 129, 695, 249, 209, 852, 479\}$
$A = \{259, 241, 249, 209\}$; $B = \{259, 129, 249, 209, 479\}$; $C = \emptyset$; $D = \{259, 828, 241, 129, 249, 209, 852\}$;
$E = \{852\}$; $F = \{487, 695, 479\}$; $G = \Omega$; $H; H = \emptyset$.
$B \cap D$: "le nombre finit par 9 et contient un 2" ; $B \cup D$: "le nombre finit par 9 ou contient un 2" ; $\bar{B} \cap D$: "le nombre ne finit pas par 9 et contient un 2" ; $B \cup \bar{D}$: "le nombre finit par 9 ou ne contient pas de 2" ; $I = A \cap B$; $J = A \cup B$; $K = \bar{A} \cap \bar{B}$; $L = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Chapitre 2

Méthodes de dénombrement

2.1 Outils graphiques de dénombrement

2.1.1 Synthèse

A. Deux variables indépendantes : ne dépendent pas l'une de l'autre.
- **Tableau double entrée**
- **Diagramme de Venn**

B. Variables Conditionnées : l'une des variables dépend d'une autre.
- **Arbre pondéré**

Règles :
— La variable non conditionnée est présentée dans le premier niveau de l'arbre.
— La loi des nœuds : la somme des coefficients autour d'un nœud est égal à 1.
— Lorsque l'on suit un chemin sur l'arbre, on multiplie les coefficients.
— Tous les coefficients sont exprimés par un nombre compris entre 0 et 1.

C. Succession de choix
- **Arbres de choix** : permet de dénombrer des choix d'éléments pris dans un certain ordre.

Règles :
— Au premier niveau, une première série de branches indique les choix d'un premier élément ;
— Au deuxième niveau, une autre série de branches indique les choix d'un deuxième élément ;
— Etc.
— Pour dénombrer tous les choix, il suffit de compter les branches au bout de l'arbre.

Test sur le chapitre : Méthodes de dénombrement. Outils graphiques

1. Un tableau double entrée permet de traiter deux grandeurs de manière

a. conditionnée **b.** simultanée **c.** successive

2. La représentation graphique pour deux variables indépendantes constitue :
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/

a. arbre de choix **b.** arbre pondéré **c.** diagramme de Venn **d.** tableau double entrée

3. Complétez la définition de l'arbre de choix.
Un arbre de choix est une représentation graphique qui permet de dénombrer ……….

4. Donnez les règles qui régissent un arbre pondéré.

5. Lorsqu'on étudie une succession de choix, on représente les différentes possibilités à l'aide de
/choisissez toutes les réponses qui conviennent/

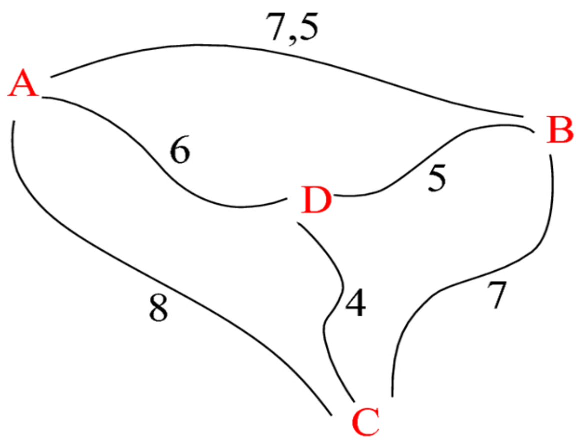
a. arbre **b.** diagramme de Venn **c.** tableau double entrée

2.1.2 Problèmes

6. **Utilisation de diagramme :** Un centre de loisir accueille 100 enfants, 2 sports sont proposés : le football et le tennis. Parmi ces 100 enfants, 60 aiment le football, 45 aiment le tennis et 18 aiment le football et le tennis. Question : Combien d'enfants n'aiment aucun des deux sports proposés ?

7. **Utilisation de tableaux à double entrée :** Une population de 100 personnes est classée suivant 2 critères : le sexe (fille / garçon) et le fait d'être fumeur ou non. On sait que 20 filles ne fument pas, que 25 garçons fument et qu'il y a en tout 37 fumeurs. De combien de filles et de garçons est composée cette population ?

8. **Utilisation d'arbre :** Un courrier doit livrer trois colis chez les clients A , B et C. On connaît la longueur de chaque trajet. On sait par ailleurs qu'il ne repasse pas par son point de départ D. La carte donne les informations suivantes



En dressant l'arbre de choix déterminer le trajet le plus court et le trajet le plus long.

9. Un comité se compose de trois membres. Pierre sait parfaitement ce qu'il veut : il vote oui à la proposition. Les deux autres membres sont indécis et votent au hasard. Combien sont les cas favorables pour que se soit le oui qui l'importe ?

10. Un autre comité se compose de cinq membres dont deux ont décidé de s'opposer à une proposition. Lest trois autres membres votent au hasard. Combien sont les cas favorables pour rejeter la proposition ?

11. Dans un pays d'un million de votants, presque tous sont indécis. Deux mille personnes sont opposées à une loi de vote des étrangers. Combien sont les cas favorables pour qu'on rejette cette loi ?

Méthodes de dénombrement. Outils graphiques de dénombrement. Indications et résultats

6. 13 enfants n'aiment aucun des deux sports proposés ;

7. 32 filles, 68 garçons ;

8. Le trajet le plus court est DCBA = 18.5 le trajet le plus long - DACB = 21 ;

9. 3 ;

10. 7.

2.2 Formules d'analyse combinatoire

2.2.1 Synthèse

Soit un ensemble $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ à n éléments distincts (tous différents) , $card(\Omega) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Sans répétition /sans remise/ (p plus petit ou égal à n) :

• Les **arrangements sans répétition**, de p éléments de Ω pris parmi n est une suite ordonnée de p éléments parmi n, et qui ne peuvent pas se répéter : $A_n^p = n!/(n–p)!$.
• Les **permutations sans répétitions**, des n éléments de Ω est une suite ordonnée des n éléments, et qui ne peuvent pas se répéter : $P_n = A_n^n = n!$ (cas particulier $n = p$).
• Les **combinaison sans répétition** de p éléments de Ω sont les ensembles (ou collections) de p éléments distincts, rangés dans n'importe quel ordre, choisis parmi les n éléments de Ω : $C_n^p = A_n^p/p! = n!/p!(n–p)!$

Avec répétition /avec remise/ (p peut être plus grand que n) :

• Les **arrangement avec répétition** de p éléments de Ω sont les suites de p éléments (distincts ou non), rangés dans un ordre déterminé, choisis parmi les n éléments de Ω : $\bar{A}_n^p = n^p$.
• Les **permutations avec répétition** de p éléments de Ω, pour la répartition $(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ sont les suites de p éléments (distincts ou non), rangés dans un ordre déterminé, constituées de : p_1 fois l'élément a_1, p_2 fois l'élément a_2,. . ., p_n fois l'élément a_n, avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = p$. Le nombre de permutations est : $\bar{P}_p^{p_1,p_2,\dots,p_n} = p!/p_1!\,p_2! \,\dots\, p_n!$.
• Une **combinaison avec répétition**, est un sous-ensemble non ordonné de p objets choisis dans un ensemble qui en contient n et qui peuvent se répéter : $\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$

Nombre des solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$
• Nombre des solutions non-négatives : C_{n+k-1}^{k-1}.
• Nombre des solutions entières, positives : C_{n-1}^{k-1}.

$0! = 1$, $(n + 1)! = n!(n + 1)$.
Quelle question se poser lors de la résolution d'un problème d'application directe en analyse combinatoire ?

Test sur le chapitre : Méthodes de dénombrement. Formules d'analyse combinatoire

1. S'il s'agit de dispositions ordonnées, les deux dispositions (a, b) et (b, a) sont

a. différentes **b.** indépendantes **c.** identiques

2. Deux dispositions contenant les mêmes éléments, qui n'occupent pas les mêmes places, sont considérées comme différentes s'il s'agit de dispositions

a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** identiques

3. Deux dispositions sont considérées comme identiques pourvue qu'elles soient constituées par

les mêmes éléments quand il s'agit de dispositions

a. ordonnées **b.** non ordonnées **c.** conditionnelles

4. Que mesurent les symboles A_m^p, C_m^p, $\bar{C}_m^p$? Calculer A_{10}^3, C_{10}^3, $\bar{C}_{10}^3$.

5. Les situations de dénombrement ci-dessous correspondent-elles à un tirage ordonnée ou non ordonné ? avec répétition ou sans répétition ?

En déduire la réponse aux questions ci-dessous, d'abord sous forme symbolique puis sous forme numérique :

(a) une famille de 6 personnes s'assoie sur un banc de 6 places. De combien de manières peut-elle le faire ?

(b) même question mais le banc contient 10 places.

(c) dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?

(d) dans le désordre ?

(e) on lance deux dés indiscernables. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?

(f) dans un ensemble à n éléments, combien y a-t-il de couples (x, y) d'éléments ?

(g) de paires $\{x, y\}$ d'éléments ?

6. On doit former un groupe comprenant 2 hommes et 3 femmes sur la base d'un groupe plus large, formé de 5 hommes et 7 femmes. Quel est le nombre de possibilités si :

(a) Le comité peut comprendre n'importe lequel des hommes et des femmes ?

(b) Une femme particulière doit être membre du comité ?

(c) Deux hommes particuliers doivent être exclu du comité ?

7. Développer $(a + b)^8$

2.2.2 Problèmes

12. Un clavier de téléphone comporte dix touches sur lesquelles on lit les chiffres 0, 1, ..., 9.

    a) Combien de numéros de neuf chiffres peut-on former ?

    b) Combien de numéros de neuf chiffres peut-on former dans le département de Sofia ?

13. Le responsable du service des personnels d'une usine doit constituer, pour assurer une permanence, une équipe composée de 3 surveillants et de 2 ouvriers d'entretien. Il dispose de 4 surveillants et de 5 ouvriers d'entretien.

    a) De combien de façons différentes peut-il constituer cette équipe ?

    b) Sachant qu'il doit éviter de placer dans la même équipe le surveillant $S1$ et l'ouvrier $O1$. Entre combien d'équipes différemment constituées peut-il choisir ?

14. Combien de signaux différents, chaque signal étant constitué de 8 pavillons alignés verticalement, peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

15. Un investisseur a 20 M€ à placer sur trois affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier en M€. Et il existe un engagement minimum pour chaque affaire qui sont respectivement 2, 3 et 4 M€. Combien de stratégies d'investissement y a-t-il si :

    a) un investissement doit être fait sur chaque affaire ?

    b) deux des trois affaires doivent être couvertes ?

16. Combien y-a-t-il

    a) d'anagrammes (permutations) du mot : SCIENCES ?

    b) Combien de permutations de 5 lettres pour la répartition (1, 1, 1, 1, 1) ?

17. Combien y-a-t-il de pièces dans un jeu de dominos, sachant que sur chaque pièce figure deux chiffres entre 0 et 6 (le 0 est représenté par un blanc) ?

18. Combien peut-on former d'octets (un octet est un mot de 8 éléments binaires appelés bits) ?

Méthodes de dénombrement. Formules d'analyse combinatoire. Indications et résultats

12. a) I chiffre n'est pas 0 $\rightarrow 9 \times 10^8$; b) I chiffre est 2 $\rightarrow 10^8$

13. a) 40 équipes différentes ; b) 28 équipes différentes sans le couple $(S1\ ,\ O1)$

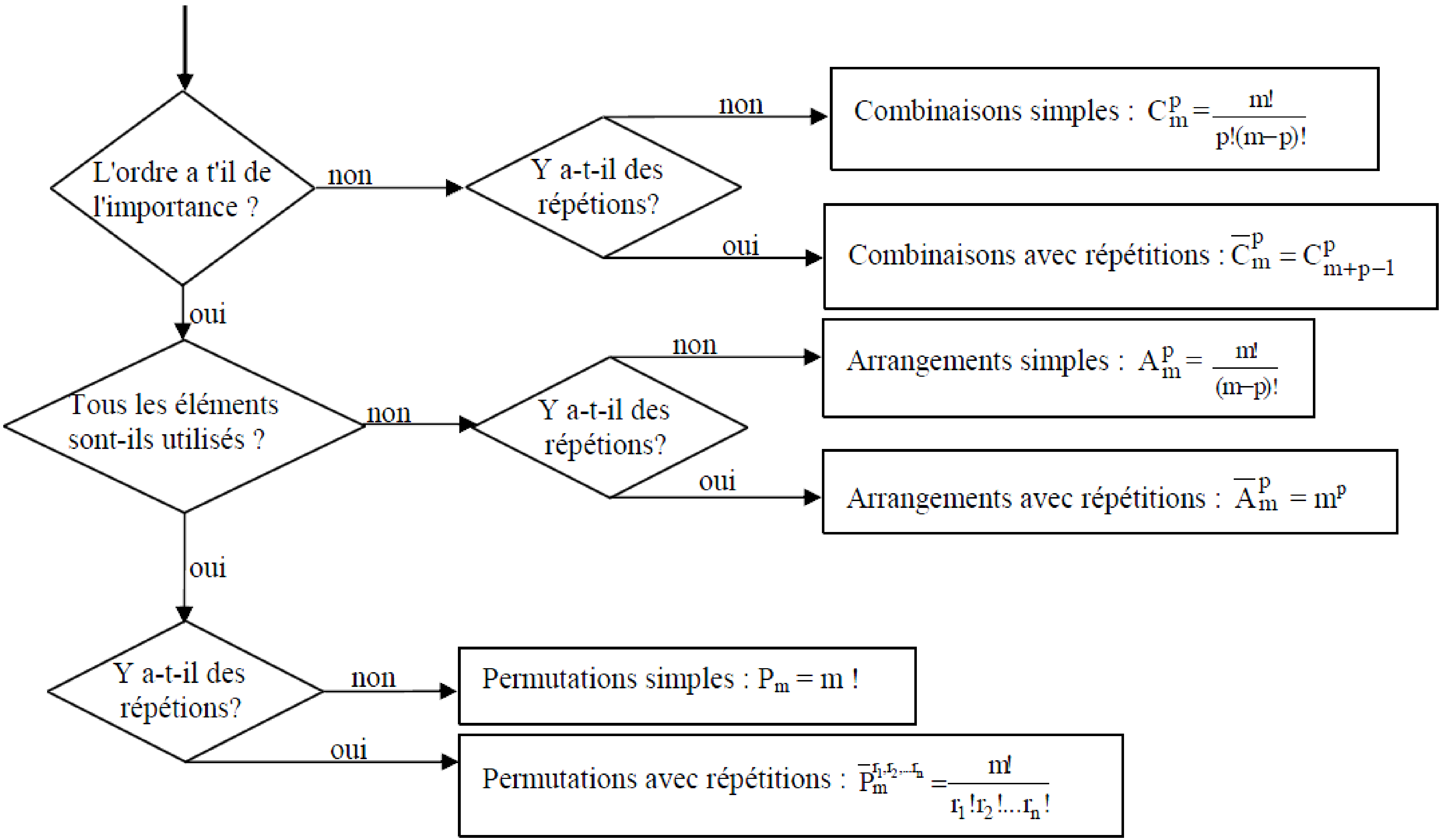
14. 280 signaux différents

15. a) 78 stratégies ; b) 45 stratégies

16. a) 5040 ; b) 5 !

17. 28 pièces

18. 256 octets.


L'ordre a t'il de l'importance ?
non
oui
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Combinaisons simples : $C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}$
Combinaisons avec répétitions : $\overline{C}_m^p = C_{m+p-1}^p$
Tous les éléments sont-ils utilisés ?
non
oui
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Arrangements simples : $A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}$
Arrangements avec répétitions : $\overline{A}_m^p = m^p$
Y a-t-il des répétions?
non
oui
Permutations simples : $P_m = m\,!$
Permutations avec répétitions : $\overline{P}_m^{r_1,r_2,\ldots,r_n} = \frac{m!}{r_1!r_2!\ldots r_n!}$

Problèmes supplémentaires

19. Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par un 7 et soit divisible par 5,
• si les nombres sont de 8 chiffres ?
• si les nombres sont de 6 chiffres ?
Réponses : 1440 ; 720

20. Cinq hommes et quatre femmes vont au cinéma. Ils disposent d'une rangée de neuf places. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir si l'on veut que chaque femme soit entourée de deux hommes ?
Réponse : 2880

21. On dispose de n boules. On veut former k groupes contenant respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_k$ boules, en utilisant toutes les boules ($r_1+r_2+\ldots+r_k = n$). De combien de façons peut-on le réaliser ?
Réponse : $\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$

22. On dispose de 5 billes rouges, 2 blanches et 3 bleues. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner ?
Réponse : 2520

23. Un groupe de 5 mathématiciens et 7 physiciens doit élire un comité représentatif formé de 2 mathématiciens et 2 physiciens. Quel est le nombre de résultats possibles si :
• les 12 personnes sont éligibles ?
• un physicien est élu d'office ?
• 2 mathématiciens ne sont pas éligibles ?
Réponses : 210 ; 60 ; 63

24. Le jeu de l'écarte se joue avec 32 cartes, chaque joueur en recevant 5. Combien de mains différentes peut avoir un joueur ?
Réponse : 201376

25. Quel est le nombre de groupes de six personnes que l'on peut former avec 4 garçons et 6 filles si l'on veut qu'ils contiennent obligatoirement 2 garçons,
• donnés ?
• seulement ?
• au moins ?
Réponses : 70 ; 90 ; 185

26. Développer $(P + Q)^{10}$

Chapitre 3

Probabilité

3.1 Synthèse Probabilité – I partie

• On appelle **probabilité** P toute **application** de l'ensemble des événements Ω dans l'intervalle $[0,1]$, tel que :

$$P \ : \ \begin{array}{l} \mathscr{T}(\Omega) \to [0,1] \\ A \mapsto P(A) \end{array}$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes

$$\begin{array}{rl} \forall A \in \mathscr{T}(\Omega) & P(A) \geq 0 \\ P(\Omega) = 1 & \\ \forall A, B \in \mathscr{T}(\Omega) & \text{si } A \cap B - \emptyset \text{ alors } P(A \cup B) = P(A) + P(B). \end{array}$$

• **Définition classique :** Soit A un événement quelconque constitué de k **événements élémentaires** de Ω. Lors de l'hypothèse d'équiprobabilité on en déduit :

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}.$$

• **Définition fréquentiste :** Si on répète N fois une expérience aléatoire dans laquelle la probabilité d'apparition d'un événement A est P, **la fréquence** de cet événement au cours des N expériences, $\frac{k}{N}$ tends vers P lorsque N tends vers l'infini. $N \to \infty \Rightarrow \frac{k}{N} \to P$.

• **Définition axiomatique :** On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{T})$ une application P de $\mathscr{T}$ dans l'intervalle $[0,1]$ telle que :

$P(\Omega) = 1$

pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles 2 à 2, on a :

$$P(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- On appelle **espace probabilisé**, le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

Ainsi un espace probabilisé désigne un espace fondamental et ses événements, muni d'une mesure de probabilités.

Exemple 1. : On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite (P, F, F, P)

Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$.
$1/2^4 = 1/16$. □

- **Propriétés des probabilités**

— **Additivité**

◦ **événements incompatibles**

Si $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ sont n événements incompatibles deux à deux ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_i \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_i) + \ldots + P(A_n)$$

La probabilité de la réunion d'un ensemble fini ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles est égale à la somme de leur probabilité d'où :

$$P(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

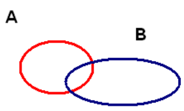
Exemple 2. : On jette une pièce de monnaie 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois F et deux fois P ?

Solution : Définir Ω : Arrangement de 4 éléments parmi 2 avec répétitions $\bar{A}_2^4 = 2^4 = 16$.
$A_1 = FFPP$, $A_2 = FPFP$, $A_3 = PFPF$, $A_4 = PPFF$, $A_5 = FPPF$, $A_6 = PFFP \Rightarrow$ nombre de cas favorables 6 $\Rightarrow P(\cup_6 A_i) = 6/16 = 3/8$. □

◦ **Deux événements quelconques**

Si A et B sont deux événements quelconques, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



— **Événement contraire**

Si A est un événement quelconque, alors

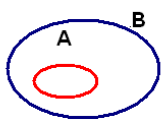
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

— **Événement impossible**

$$P(\emptyset) = 0$$

— **Inclusion**

Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.



— **Multiplicativité**

○ Deux événements sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple 3. On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes.
A : la carte tirée est un pique. $P(A) = 13/52$.
B : la carte tirée est un roi. $P(B) = 4/52$.
$P(A \cap B) = 1/52$ (probabilité d'avoir le roi de pique).
$P(A).P(B) = \frac{13}{52}\frac{4}{52} = \frac{52}{52^2} = \frac{1}{52}$. Et nous avons bien $P(A \cap B) = P(A).P(B) \Longleftrightarrow$ A et B sont indépendants □

○ **Généralisation** à n événements
n événements ($n \geq 2$), A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n sont indépendants dans leur ensemble (ou mutuellement indépendants) si on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_i) \times \ldots \times P(A_n)$$

$$P(\cap_i A_i) = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Test sur le chapitre : Probabilité - I partie

1. Combien d'interprétations de la notion de probabilité connaissez-vous ?
2. Donnez la définition classique de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
3. Donnez la définition fréquentiste de probabilité (énoncer l'hypothèse et démontrer la formule).
4. Énoncez la loi d'addition de probabilité pour les événements A et B compatibles $(A \cap B) = \emptyset$.
5. Énoncez la loi d'addition de probabilité des événements incompatibles A et B.
6. Déduire la probabilité de A en fonction des probabilités des deux événement $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$.

3.2 Problèmes : Probabilité - I partie

27. On jette un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'avoir les points :
    a) 1,4,6 dans l'ordre ?
    b) 1,5,5 dans l'ordre ?

c) 1,4,6 dans l'ordre ou dans le désordre ?
d) 1,5,5 dans l'ordre ou dans le désordre ?
e) 4,4,4 ?

28. Un dé non pipé est lancé deux fois de suite. On note la somme des points obtenus aux deux jets. Quelles sont les sommes qui ont :

   a) la plus forte probabilité d'apparaître ?
   b) la plus faible probabilité d'apparaître ?

29. On lance 2 dés différents. Quelle est la probabilité des événements suivant
A : la somme des points obtenus est 6
B : la somme des points obtenus est < 6
C : la somme des points obtenus est > 6.

30. Un dé est pipé de telle sorte que la probabilité d'apparaitre pour chacune des faces soit proportionnelle au point marqué sur la face. On lance le dé une fois. Calculer :
a) la probabilité de chaque épreuve.
b) la probabilité d'obtenir un point paire.
c) la probabilité d'obtenir un point impaire.

31. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois face dans quatre parties consécutives de "pile ou face" ?

32. Deux événements A et B ont pour probabilité 0,7 et 0,5.

   a) sont-ils incompatibles ?
   b) Sachant que la probabilité de leur réunion est de 0,9, calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cap \bar{B})$.

33. Dans un jeu de 52 cartes, on extrait 1 carte.
a) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit ?
b) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit sachant que c'est un coeur ?
c) Quelle est la probabilité que cette carte soit un huit sachant que ce n'est pas une image ?

34. Un joueur possède 4 cartes : l ;as et le roi de cœur, l'as et le roi de trèfle. Il les mélange. Quelle est las probabilité pour que la couleur des cartes alterne (rouge et noir) ?

35. Un sac contient 20 jetons numérotés de 1 à 20
a) On tire un jeton. Tous les jetons ayant même probabilité d'être extraits, quelle est la probabilité pour que le nombre tiré :
a.1) soit impair
a.2) soit impair et divisible par 3 ?
b) On tire ensemble 2 jetons. Toutes les paires de jetons ayant la même probabilité d'être extraites, calculez la probabilité pour que :
b.1) la somme des nombres tirés soit 12
b.2) le produit des nombres tirés soit 12.

36. Vous possédez de 10 pièces de monnaie dont trois sont fausses. Vous donnez, au hasard deux de ces pièces. Quelle est la probabilité pour que
a) les deux pièces soient bonnes ?
b) une seule soit fausse ?
c) les deux pièces soient fausses ?

Probabilité I partie. Indications et résultats

27. a) 1/216=0.0046296 ; b) 1/216=0.0046296 ; c) 6/216=0.027777 ; d) $3/216 = 0.0138888$; e)=1/216=0.0046296 ;

28. a) $P(7) = 1/6$; b) $P(2) = P(12) = 1/36$;

29. $P(A) = 5/36$, $P(B) = 10/36$, $P(C) = 21/36$;

30. a) $P(1) = 1/21$, $P(2) = 2/21$, ..., $P(6) = 6/21$; b) 12/21 ; c) 9/21 ;

31. $\frac{1}{4}$;

32. a) $P(A \cap B) = 0 \to A$ et B compatibles ; b) $P(A \cap B) = 0.3$; $P(A \cap \bar{B}) = 0.4$;

33. a) $\frac{1}{13}$; b) $\frac{1}{13}$; c) $\frac{1}{10}$;

34. $\frac{1}{3}$;

35. a.1) 1/2 ; a.2) 3/20 ; b.1) 1/38 ; b.2) 3/190 ;

36. a) $\frac{21}{45}$; b) $\frac{7}{15}$; c) $\frac{1}{15}$.

3.3 Synthèse Probabilité – II partie

- **Probabilités conditionnelles**

Soit deux événements A et B d'un espace probabilisé Ω avec $P(B) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de l'événement "A si B" (ou "A sachant B"), le quotient

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple 4. On lance une paire de dés différenciés et on observe la face supérieure de chaque dé. Calculer la probabilité pour qu'un des dés donne comme résultat 2 sachant que la somme des points obtenus est 6.
Considérons les événements qui intervient.
A : L'un des dés donne 2 = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)}

B : La somme des points vaut 6 = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}.
$A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{5/36} = \frac{2}{5}.$$

○ Si A et B sont deux événements indépendants et que $P(B) \neq 0$ alors ceci équivaut à affirmer que

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A).$$

- **Formule des probabilités composées**

Soit deux événements A et B d'un espace probabilisé Ω. Alors,

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(A/B)P(B)$$

- **Théorème des probabilités totales**

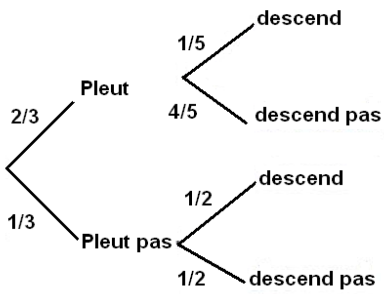
Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ est un **système complet d'événements** /c.-à-d. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une partition de Ω, c.-à-d. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : A_i \cap A_j = \emptyset$ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $A_i \neq \emptyset (\Longrightarrow P(A_i) \neq 0)$/, quel que soit l'événement B, alors :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n) \\ P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Exemple 5. Je descends en ville demain avec une probabilité de 1/5 s'il pleut et de 1/2 s'il ne pleut pas. La probabilité qu'il pleuve demain est de 2/3. Quelle est la probabilité que je descende en ville demain ?

Solution. Soit A_1 =il pleut demain ; A_2 = in ne pleut pas demain ; B = je descends en ville.
$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) = 2/3.1/5 + 1/3.1/2 = 3/10.$

On peut schématiser cette situation par un diagramme en arbre.
Et nous avons de même :
$P(B) = 2/3.1/5 + 1/3.1/2 = 3/10.$



- **Formule de Bayes**

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements, et quel que soit l'événement B tel que $P(B) \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} P(A_i/B) &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_i)P(A_i) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)} \\ P(A_i/B) &= \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)} \end{aligned}$$

La formule de Bayes est utilisée de façon classique pour calculer des probabilités de causes dans des diagnostics (maladies, pannes, etc.).

Test sur le chapitre : Probabilité - II partie

1. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?
   Que vaut $P(A/B)$ lorsque A et B sont indépendants ? :
   $P(A/B) = P(A)$; $P(B/A) = P(B)$.

2. Énoncez la loi de multiplication de probabilité pour les événements A et B indépendants :

3. Énoncez la loi d'addition de probabilité des événements incompatibles A et B.

3.4 Problèmes : Probabilité – II partie

37. Lors d'un examen, 25% des étudiants échouent en mathématiques, 15% échouent en informatique et 10% échouent à la fois en mathématiques et en informatique.

    a) Les deux événements M : "échouer en mathématiques" et C : "échouer en informatique" sont-ils indépendants ?

    b) Calculer la probabilité conditionnelle d'échouer en informatique sachant que l'étudiant a échoué en mathématiques.

38. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boites de CD-ROM. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

    - 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un CD-ROM défectueux.
    - 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun CD-ROM défectueux.

    D l'événement "la boîte achetée contient au moins une disquette défectueuse".
    a). Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D/A)$, $P(D/\bar{A})$, $P(\bar{D}/A)$ et $P(\bar{D}/\bar{A})$.
    b). Le client constate qu'un des CD-ROM acheté est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abimée.

39. On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que
    a)la première boule tirée soit noire, la seconde blanche et la troisième noire ? b) la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

40. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

41. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de 1/2. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

42. Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

    - si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
    - si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

    On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.Quelle est la probabilité
    a). qu'il y ait une erreur de contrôle ?
    b). qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

43. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3.
    Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.
    a). Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
    b). Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

44. D'un jeu de 32 cartes, on extrait huit cartes. Soient les événements A et B.
    A : "la main de huit cartes comprend exactement 3 cœurs"
    B : "la main de huit cartes comprend exactement 3 piques"
    A et B sont-ils indépendants ?

45. On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité qu'un des points soit 6 sachant que la somme des points est 9.

46. Dans une ville donnée, 40% de la population a des cheveux bruns, 25% a les yeux marrons et 15% a à la fois les cheveux bruns et les yeux marrons.
    On choisit au hasard une personne.
    Si elle a des cheveux bruns, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux marrons ?

47. On tire successivement et au hasard quatre lettres du mot PROFITABLES. Quelle est la probabilité, pour que dans l'ordre du tirage, ces lettres forment le mot RATE ?
    a) si on replace la lettre choisie après chaque tirage.
    b) si on ne la rend pas.

Probabilité II partie. Indications et résultats

37. a). M et C sont dépendants ; b) $P(C|M) = 0.4$;

38. a) $P(A) = 0,05$, $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D/A) = 0,6$ $P(\bar{D}/\bar{A}) = 0,98$, $P(\bar{D}/A) = 0,4$, $P(D/\bar{A}) = 0,02$, $P(D) = \frac{49}{1000}$; b). $\frac{30}{49}$;

39. a) $\frac{4}{35}$; b) $\frac{6}{35}$;

40. $\frac{mp}{1+(m-1)p}$;

41. $\frac{1}{2}$;

42. a) 0,04 ; b) $\frac{1}{913} \approx 0,001$;

43. a) 0,175 ; b) 0,23 ;

44. événements dépendants ;

45. $\frac{1}{2}$;

46. $\frac{3}{8}$;

47. a) 1/14641 ; b) $\frac{1}{7920}$.

Chapitre 4

Modèles d'urne

4.1 Synthèse

- **Modes de tirage :**
  - **successif avec remise**
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, en remettant chaque fois la boule tirée avant de procéder au tirage suivant.
  - **successif sans remise**
    On peut tirer les boules l'une après l'autre, sans qu'une boule tirée soit remise dans l'urne.
  - **simultanément**
    On peut tirer les boules *simultanément*, c'est-à-dire d'un seul coup. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage sans remise.
  - **exhaustif**
    On tire toutes les boules dans l'urne successivement ou simultanément (on vide l'urne).
  - **non exhaustif**
    On tire p boules de l'urne, comportant n boules et $p < n$. On ne vide pas l'urne.

<table>
<tr><th>Types de tirages</th><th>Ordre</th><th>Répétitions d'éléments</th><th>Dénombrement</th></tr>
<tr><td>Successifs avec remise</td><td rowspan="2">On tient compte de l'ordre</td><td>Un élément peut être tiré plusieurs fois</td><td>$\bar{A}_n^p$ arrangements avec répétition n^p</td></tr>
<tr><td>Successifs sans remise</td><td rowspan="2">Un élément n'est tiré qu'une seule fois</td><td>A_n^p arrangements $\frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
<tr><td>Simultanés</td><td>L'ordre n'intervient pas</td><td>C_n^p combinatoires $\frac{n!}{p!(n-p)!}$</td></tr>
</table>

- **Urne contenant deux sortes de boules**

— Boules prélevées **avec remise** - succession de n expériences partielles, identiques et indépendantes l'une de l'autre :

$$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap \bar{F}_{k+1} \cap \ldots \cap \bar{F}_n.$$

Soit $E_k =$ "prélever k boules du type A parmi les n boules tirés dans les différents cas".

$$P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k,$$

où $p = N_1/N$ est la probabilité qu'une boule tirée soit de type A ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

— tirage de n boules **sans remise** - n expériences partielles non identiques et non indépendantes l'une de l'autre.
Théorème de multiplication : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ - A, B - événements indépendants ; $P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$ - événements dépendants/

$$P(E_k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

où $\max(0, n - N + N_1) \leq k \leq \min(N_1, n)$.

— tirage **simultané** - événements non équiprobables. Probabilité même que celle de tirage sans remise.

4.1.1 Probabilité d'obtention d'un nombre donné de boules

Considérons une urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes. Supposons les couleurs numérotées de 1 à k. Pour chaque couleur i de $[1, k]$, on note N_i le nombre de boules de la couleur i. Pour tout entier i compris entre 1 et k désignons par $p_i = \frac{N_i}{N}$ la proportion de boules de la couleur i dans l'urne. On a la relation $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
Intéressons nous à la répartition des couleurs dans le tirage obtenu, c'est-à-dire au nombre de boules obtenues dans chaque couleur.
Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Considérons l'ensemble $A(n_1, \ldots, n_k)$ des tirages contenant exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., et n_k boules de la couleur k. Pour chacun des modes de tirage précédents, nous allons déterminer la probabilité de cet événement $A(n_1, \ldots, n_k)$.

Tirage avec remise : Dans le cas d'un tirage avec remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} \ldots p_n^{n_k}$$

Tirage sans remise : Dans le cas d'un tirage sans remise de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \,.\, \ldots \,.\, C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$$

Tirage simultané : Dans le cas d'un tirage simultané de n boules de l'urne $\mathscr{U}$ précédente on a :

$$P(A(n_1, \ldots, n_k)) = \frac{C_{N_1}^{n_1} \,.\, C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}.$$

4.1.2 Schéma (processus) de Bernoulli

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succès) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$. Répétons n fois cette expérience. On a un schéma (ou processus) de Bernoulli si les conditions suivantes sont satisfaites :

- les expériences successives sont indépendantes les unes des autres
- la probabilité d'obtenir S reste égale à p lors de chaque répétition.

On peut s'intéresser au nombre de fois que S s'est réalisé au cours des n expériences.

$$P(S \text{ se réalise } k \text{ fois}) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Un tel schéma est décrit par un modèle d'urne et des tirages avec remise.

Test sur le chapitre : Modèles d'urne

1. Combien de modes de tirage connaissez vous ? Énumérer les.
2. Décrivez le tirage avec remise
3. Décrivez le tirage sans remise
4. Décrivez le tirage simultané. De point de vue probabiliste cette méthode de tirage est identique à celle du tirage

   a. sans remise **b.** avec remise

5. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n objets parmi n objets avec remise.
6. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p objets parmi n objets avec remise.

7. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de p éléments parmi n sans remise.

8. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirages successifs de n éléments parmi n sans remise.

9. Donnez le nombre des résultats possibles dans le cas de tirage simultané de p éléments parmi n.

4.2 Problèmes

48. On dispose de 3 urnes. La première contient 3 boules blanches et une noire. La deuxième 2 blanches et 3 noires. Et la troisième 3 blanches et 4 noires. On tire une boule dans une des urnes. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?

49. Un sac contient des boules de même rayon et de même poids ; il y a 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard et successivement deux boules du sac (sans replacer la première boule). Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

50. A l'examen, un étudiant doit tirer 2 fiches dans chacun des 3 paquets contenant 10, 15 et 20 fiches. L'étudiant ne connaît que 3 questions pour chaque paquet. Quelle est la probabilité :
a) qu'il tire 6 fiches qu'il connaît ?
b) qu'il tire au moins une fiche qu'il connaît ?

51. Un bassin comporte 30 poissons. Il y a 5 carpes, 10 brochets, 15 gardons. On pêche 4 poissons d'un seul coup d'épuisette. Quelle est la probabilité
a) d'avoir 4 gardons.
b) qu'au moins un poisson soit une femelle sachant qu'il y a respectivement 2, 4 et 5 femelles dans chaque groupe.

52. Une urne A renferme 5 billes rouges et 3 blanches.
Une urne B renferme 2 billes rouges et 6 blanches.
a) Si l'on tire une bille dans chaque urne, quelle est la probabilité pour qu'elles soient de la même couleur ?
b) Si l'on tire 2 billes dans chaque urne, quelle est la probabilité pour qu'elles soient toutes de la même couleur ?

53. Un sac contient 7 boules blanches, 5 rouges et 3 vertes. Dans l'épreuve qui consiste à tirer 3 boules simultanément, quelle est la probabilité :
a) de tirer 3 boules de couleurs différentes ;
b) de tirer 3 boules dont deux au moins sont rouges ;
c) de tirer au moins une boule blanche sur les trois ?

54. Une urne contient 2 boules blanches, une boule noire, 7 boules rouges. On extrait successivement deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche puis une boule noire.
a) en remettant la boule tirée dans l'urne après le premier tirage ?
b) sans la remettre ?

55. Une urne contient deux boules noires, trois boules blanches et une boule rouge. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'une des boules soit noire et l'autre rouge, sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes ?

56. Une urne contient 2 boules blanches, une noire et une rouge. On y prend au hasard une boule et on la place dans une seconde urne qui contient déjà 2 boules rouges et une boule noire. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge dans la seconde urne ?

Modèles d'urne. Indications et résultats

48. $221/420 \approx 0.52$;

49. $13/28$;

50. a)3/99750 ; ,) 0,79003 ;

51. a)0,05 ; b) 0,86 ;

52. a)0,4375 ; b) 0.070'

53. a) $3/13$; b) $\frac{22}{91}$; c) $\frac{57}{65}$;

54. a) 0,02 ; b) $\frac{2}{90} = 0.0222\ldots$;

55. $\frac{2}{11}$;

56. $\frac{9}{16}$.

Chapitre 5

Variable aléatoire et distribution de probabilité. Variable aléatoire discrète

5.1 Synthèse

• **Variable aléatoire :** Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ l'espace probabilisé d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité P et lié à une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire réelle** (v.a.) sur cet espace, toute application X de son ensemble fondamental Ω dans $\mathbb{R}$, tel que : $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \omega \longrightarrow x, \quad$ avec $x = X(\omega)$, c.-à-d. une application qui à chaque élément de Ω (à chaque résultat d'une expérience aléatoire) associe une donnée numérique réelle (voir la Fig.1). On dit que x est la valeur prise par la v.a. X lorsque le résultat de l'expérience aléatoire est ω.

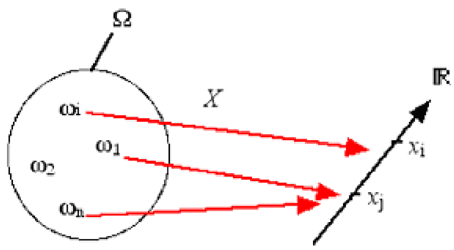


Fig. 1 Variable aléatoire

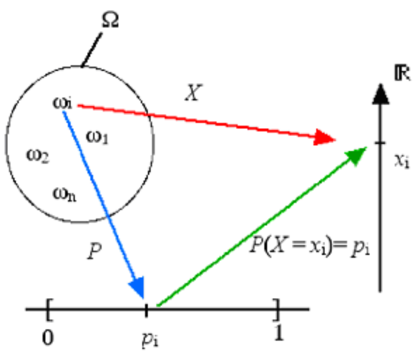


Fig.2 Distribution de probabilité

A chaque événement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X. Il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire X que d'événements élémentaires. La valeur x correspond à la réalisation de la variable X pour l'événement élémentaire ω.

• **Variable aléatoire discrète :** v. a. dont les différentes valeurs possibles sont en nombre fini ou infini dénombrable - en règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération.

• **Loi ou distribution de probabilité** d'une v.a. discrète X est la fonction définie par l'ensemble des couples $\{(x, p_x) : x \in V\}$ (voir la Fig.2).

• Représentation graphique de la loi de probabilité d'une v.a. discrète - par un **diagramme**

en bâtons.

- **Fonction de répartition** : associe à une valeur réelle quelconque x la probabilité pour que la v.a. X prenne une valeur inférieure à x. Notée : $F(x) = P(X < x)$.

- **Propriétés de la fonction de répartition** Soit $F(x) = P\{X < x\}$ la fonction de répartition d'une la variable aléatoire discrète X, alors :
a). $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq F(x) \leq 1$
b). $F(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
c). $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
d). si $a \leq b$ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.
Lorsque l'ensemble des valeurs possibles, ou ensemble de définition de la variable aléatoire X est fini : $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \}$, $F(x)$ est nulle sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$ et égale à 1 sur l'intervalle $[x_n, +\infty[$.

- **Représentation graphique** de la fonction de répartition - la **courbe cumulative (courbe de répartition)**. Dans le cas d'une variable discrète, on l'appelle encore **courbe en escalier** à cause de sa forme : elle présente des marches (ou sauts) aux points d'abscisse x_i correspondant aux valeurs possibles de la variable.

- **Calcule de la fonction de répartition** à partir des probabilités attachées aux valeurs possibles de la variable discrète :$F(x) = \sum_{x_i<x} P\{X = x_i\}$.

- **Reconstruction de la distribution de probabilité à partir de la fonction de répartition :** $P\{X = x_i\} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

- **Paramètres d'une variable aléatoire discrète**

A. Paramètre de position

- **Espérance mathématique ou "moyenne probabiliste"** $E(X) = \mu(X) = \mu$ d'une v. a. discrète X de loi de probabilité $(x_i, p_i), i = \overline{1, n}$ $est E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

- **Propriétés de l'espérance mathématique**
Si a et b sont des nombres réels (des constantes) et X une variable aléatoire : $E(a) = a$; $E(aX) = aE(X)$; $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$.

- **Variable centrée** - une v. a. réelle discrète d'espérance mathématique nulle.
Si on considère une variable aléatoire réelle discrète X d'espérance mathématique $E(X)$, alors la variable aléatoire réelle discrète $\boldsymbol{X' = X - E(X)}$ est centrée. Sa moyenne est nulle.

B. Paramètres de dispersion

— **Variance** $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$
— **Ecart-type** $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$.

L'écart-type indique dans quelle mesure les valeurs prises par la variable aléatoire ont tendance à être plus ou moins dispersées autour de l'espérance mathématique.
En gestion, il nous renseignera sur le degré de risque lié à certaines décisions prises à partir des différentes valeurs de la variable. Plus l'écart-type sera élevé, plus le risque sera grand.

• **Calcul de $Var(X)$:** $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

• **Propriétés de la variance**
Si a est un nombre réel (une constante) et X une variable aléatoire : $Var(a) = 0$; $Var(aX) = a^2 Var(X)$.

• **Variable réduite** - v. a. de variance 1. Si on considère une variable aléatoire réelle discrète X de variance $Var(X) = (\sigma(X))^2 \neq 0$ (non nécessairement égale à 1), alors la variable aléatoire réelle discrète $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\sigma(\mathbf{X})$ est réduite.

• **Variable aléatoire centrée réduite** - une variable aléatoire réelle discrète d'espérance nulle et de variance unité. Si on considère une v.a. discrète X d'espérance mathématique $E(X)$ et de variance $Var(X) = (\sigma(X))^2$, alors la v. a. réelle discrète $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}-\mathbf{E}(\mathbf{X})}{\sigma(\mathbf{X})}$ est v. a. centrée et réduite.

Test sur le chapitre : Variable aléatoire discrète

1. Qu'est-ce que la variable aléatoire ?

2. Donnez la définition de v.a. discrète

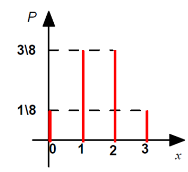
3. Décrivez la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète ?

4. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète peut être représenté graphiquement par un diagramme en ….

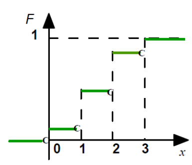
5. Décrivez la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète ?

6. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète se visualise par un diagramme en ….

7. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



8. La figure ci-dessous est un diagramme en bâtons / une fonction en escalier et visualise la distribution de probabilité / la loi de probabilité / la fonction de répartition. /souligner les notions correctes/



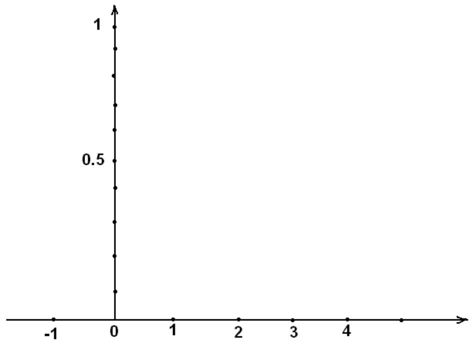
9. Décrivez les paramètres d'une loi de probabilité discrète
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire discrète est centrée ?
11. Donnez la définition de la variable aléatoire discrète réduite.

5.2 Problèmes

57. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne et on note la couleur des boules tirées.
a) Déterminer le système complet d'événements et la probabilité de chacun d'eux.
Supposons que c'est un jeu et que chaque boule rouge tirée rapporte 1 €. Notons X la somme gagnée.
b) Déterminer les valeurs possibles pour X.
c) Compléter le tableau :

X			
P(X=x)			

Ce tableau représente la loi de probabilité (ou fonction de distribution) de la variable aléatoire X.
d) Donner la représentation graphique de la fonction de distribution de X.



e) Combien peut-on espérer gagner en moyenne ?

58. M Martin a dans sa poche 5 pièces de 1 € et 3 pièces de 2 €. Il tire au hasard et simultanément 2 pièces de sa poche. M Martin a besoin de 3 € au moins pour payer le stationnement de son véhicule.
a) Quelle est la probabilité que M Martin puisse payer le stationnement avec les 2 pièces qu'il a tirées ?
b) Quelle somme peut-il espérer tirer en moyenne ?
Appelons X la v.a. qui donne la "somme tirée". Valeurs possibles de X :
c) Compléter le tableau :

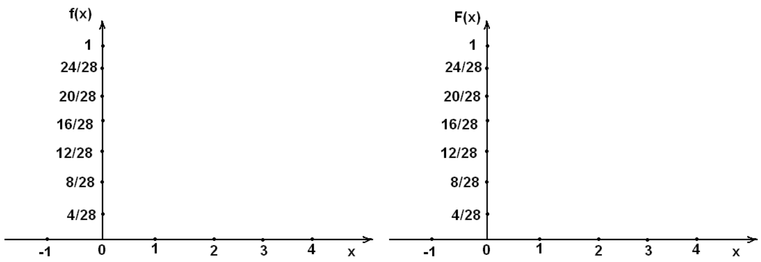
x			
$P(X = x)$			

fonction de distribution - loi de probabilité f
d) Comment traduire l'événement "M.Martin peut payer le stationnement avec les deux pièces qu'il a tirées" à l'aide de la v.a. X ?
e) Compléter le tableau :

x			
$P(X < x)$			

fonction de

répartition F
f) Donner la représentation graphique des fonctions f et F



59. Soit X une v.a. dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	-1	0	3	5	
$P(X=x)$	0,1	0,3	0,4	0,2	
$P(X<x)$					

a) Compléter le tableau et donner la représentation graphique de la loi de probabilité de X et de sa fonction de répartition.
b) Calculer $E(X)$; $Var(X)$

60. On propose à un joueur de choisir parmi les deux jeux suivants :
a) On lance un dé bien équilibré. Si le dé montre la face "1" ou "6", le joueur gagne 12 points, sinon il perd 6 points.
b) On lance le dé. S'il montre 6, le joueur gagne 120 points, sinon, il perd 25 points.
Quel jeu est plus intéressant et selon quel critère ?
Pour répondre à cette question, imaginez que le même jeu est répété un grand nombre de fois.

61. Envisager les trois jeux ci-dessous. Parmi eux, lequel est le plus intéressant pour un joueur et selon quels critères ?
a) On lance un dé à 6 faces. Si c'est un 6, le joueur empoche 20 €; si ce n'est pas un 6, il perd 1 €.
b) On lance un dé à 6 faces. Si on obtient 1 ou 6, le joueur empoche 30 €, sinon il doit payer 10 €.
c) Le joueur tire un billet dans une urne qui en contient 100 dont un rouge et 99 bleus. S'il tire le rouge, la banque lui donne 1 000 000 €, sinon il doit payer 1 000 €.

62. On extrait 4 cartes d'un jeu de 52 cartes.
a) Le nombre de cartes de cœur ainsi extraites est une variable aléatoire. Quelle est sa distribution de probabilité ? Calculer sa moyenne et son écart-type.
b) Même question si on considère la variable aléatoire "nombre d'as".

Chapitre 6

Lois de probabilité discrètes particulières

6.1 Synthèse

A. Lois usuelles finies

6.1.1 Distribution uniforme (discrète) $X \sim \mathcal{U}(n)$

Définition : Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque l'ensemble des observables de la valeur aléatoire contient un nombre fini de valeurs réelles : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables :

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Une distribution uniforme ne présente, évidemment, pas de mode.

- **Paramètres descriptifs :**

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;\ E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2;\ \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

- **Cas fréquent** $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

— **Fonction de distribution :** $(k, 1/n)$; $p_k = P(X = k) = 1/n$, $k = 1, \ldots, n$

— **Fonction de répartition :** $F(x) = k/n$, $(k \leq x < k + 1)$

— **Paramètres :** $\mu = \frac{(n+1)}{2}$; $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$.

6.1.2 Distribution de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$

Soit une expérience aléatoire ayant exactement 2 issues possibles, c.à.d. donnant lieu à 2 événements complémentaires S (succés) et $\bar{S}$ (échec) avec les probabilités $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = 1 - p = q$.

Définition : On appelle **variable indicatrice** ou **variable de Bernoulli** de l'événement S la variable aléatoire X qui associe à S la valeur un et à $\bar{S}$ la valeur zéro : $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Définition : La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X telle que : $\{(0, q), (1, p)\}$, c.à d. $P(X = 0) = q$, $P(X = 1) = p$, avec $p + q = 1$ est applée **loi de Bernoulli** notée $\mathcal{B}[1, p]$

- **Notation :** $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$
- **Fonction de répartition :** $F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ q & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- **Paramètres descriptifs :** $\mu = p$; $\sigma^2 = pq$. Le mode est 1 si $p > \frac{1}{2}$, et 0 si $p < \frac{1}{2}$. Il n'y a pas de mode si $p = \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on obtient la loi uniforme sur $[0, 1]$ puisque alors $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Exemples typiques : Le lancer d'une pièce de monnaie ; l'extraction d'une boule dans une urne ne contenant que deux types de boules ; la réponse à une question d'un vrai ou faux ;...

6.1.3 Distribution binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

La loi binomiale correspond au tirage d'un échantillon avec remise dans une population comportant deux catégories d'individus.

Définition : On dit qu'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit une loi binomiale si sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, où n est entier donné /nombre de tirages successifs ou d'épreuves indépendantes/ et où p /la probabilité de la réalisation de l'événement/ est un réel tel que $0 < p < 1$.

- **Notation :** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
- **Fonction de répartition** $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i q^{n-i} & k < x \leq k + 1 \\ 1 & x > n \end{cases}$,

$/BINOMDIST(k; n; p; 1)/$

- **Paramètres** $\mu = np$, $\sigma^2 = npq$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

- **Forme** La distribution binomiale est de type unimodal **symétrique** quand $p = q = 0,5$ et quand le nombre d'observations est grand, à condition que p ne soit pas trop voisin de 0 ou de 1. Sinon, elle est **dissymétrique,** la dissymétrie étant d'autant plus grande que p est plus différent de q.

La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes, répétés n fois de façon indépendante, pouvant prendre deux états (et deux seulement) : succès ou échec, oui ou non, état 0 ou état 1,...
La loi "théorique" la plus fréquente. Utilisation pratique souvent limitée : on ne peut obtenir un résultat "rapide" que dans certains cas. Dans des conditions, la loi binômiale peut être approchée par les lois de Poisson ou de Gauss, d'un usage plus commode.

- **Stabilité :** Si S_n et S_m sont deux variables **indépendantes** suivant des lois binomiales respectivement $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $S_m \sim \mathcal{B}(m, p)$ alors $S_n + S_m \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

6.1.4 Distribution hypergéométrique $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$

La loi hypergéométrique correspond au tirage d'un échantillon sans remise. Dans ce cas p et q ne restent pas constants.

Définition : Supposons que l'on a N_p objets parmi N d'un certain type. On prélève un échantillon de n objets (sans remise). La loi hypergéométrique donne la probabilité que k objets parmi les n soient du type N_p. La loi de probabilité est donnée par : $P(X = k) = \frac{C^k_{N_p} C^{n-k}_{N_q}}{C^n_N}, k \in \{0, \dots, \min(n, N_p)\}$.

- **Notation :** $X \sim \mathscr{H}(N, n, p)$

- **Paramètres :** $\mu = E(X) = np$, $Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$.

Rémarque : La variable hypergéométrique X dépend des 3 paramètres : N, effectif de la population, p, proportion primitive de boules blanches dans celle-ci, n, nombre de tirages successifs (effectif de l'échantillon).
En pratique : si $N > 10n$, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N; n; p)$ est approchée par la loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$ (puisque $p = N_p/N$ est la proportion quasi-constante).

B. Lois infinies

6.1.5 Loi géometrique ou de Pascal $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0, 1)$

La loi géométrique est la loi du premier succès, c'est-à-dire le nombre d'essais nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p.

Définition : On répète de façon indépendante une expérience de Bernouilli autant de fois qu'il faut pour obtenir un succès. Soit X, le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le 1-er succès. X suit une **loi géométrique de paramètre** p ou **loi de Pascal** de probabilité : $P(X = n) = p_n = pq^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots.$

- **Notation :** $X \sim \mathscr{G}(p), p \in (0, 1)$

- **Paramètres** $\mu = \frac{1}{p}$; $\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$.

- **Formule de récurrence :** $P(X = n + 1) = P(X = n)(1 - p)$

- **Mode :** Puisque $0 < 1 - p < 1$, la formule de récurence montre que les probabilités successives décroissent constamment ; **le mode** a donc pour valeur 1.

- **Cas typique :** Le tirage avec remise de n boules dans une urne ne contenant que deux types de boules (on s'intéresse à l'indice de la première obtention d'une boule d'un certain type) ;...

Définition : Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$. On effectue plusieurs tirages d'une boule dans l'urne sans rémise. n est le nombre de tirages. La variable X qui signifie le nombre de tirages pour obtenir la première boule blanche suit la **loi de Pascal sans rémise** $\boldsymbol{X \sim \mathcal{S}(N, p)}$, dont les probabilités se calculent par :

$$P(X = k) = \frac{C_{N-M}^{k-1}}{C_N^{k-1}} \frac{M}{N - k + 1}, \quad \{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq N - M + 1\}$$

- **Paramètres :** $E(X) = \frac{N+1}{M+1}$, $Var(X) = q\frac{NM(N+1)}{(M+1)^2(M+2)}$.

6.1.6 Loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

La loi de Poisson est la loi des évènements rares (de petite probabilité) : maladies rares, accidents rares, pannes, radioactivité..., dont les chances de réalisation sont faibles. Pour que la loi s'applique il est nécessaire que la probabilité de réalisation de l'événement reste constante.

Définition : Une v.a. X suit une loi de Poisson de paramétre λ (λ réel strictement positif) si elle admet pour fonction de distribution l'ensemble des couples (k, p_k) avec $k \in \mathbb{N}$ et $p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

- **Notation :** $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$

- **Fonction de répartition :** $F(k) = P(X < k) = \sum_{0 \leq j < k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.

- **Paramètres :** $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$.

- **Formule de récurrence :** $P(X = k + 1) = P(X = k)\frac{\lambda}{k+1}$

La distribution est de type **unimodal** et admet pour mode l'entier, en général unique, situé dans l'intervalle $[\lambda - 1, \lambda]$ ou exceptionnellement deux modes successifs, équiprobables, bornes de l'intervalle ci-dessus lorsque λ a une valeur entière.

- **Forme de la distribution**

— en L si $\lambda \leq 1$;

— en cloche dissymétrique pour $\lambda > 1$. Le mode se déplace vers la droite lorsque λ augmente.

- **Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson**

La loi de Poisson fournit une bonne approximation de la loi binômiale lorsque :

$$n > 30; \quad n\,p < 5 \quad \text{ou } n\,q < 30$$

or

$$n > 50; \quad p \leq 0.1; \quad npq < 20.$$

Mais quelles que soient les approches, on doit toujours avoir :

- n suffisamment grand (au minimum $n = 30$)
- p petit (au maximum $p = 0.10$)

Dans tous les cas, lorsqu'on utilisera cette approximation on prendra :

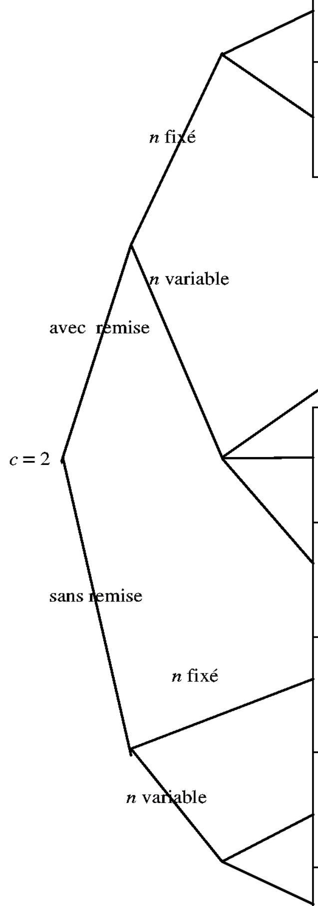
$$\lambda = \text{ espérance d'une v.a. binômiale } = np.$$

Factorielles

n	n!
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

Lois discrètes présentées par des modèles d'urne

Une urne contient N boules, de c couleurs, dont M blanches, on pose $p = \frac{M}{N}$.
Pour $1 \leq i \leq c$, on appelle M_i le nombre de boules de couleur i et on pose $p_i = \frac{M_i}{N}$.
On effectue un ou plusieurs tirages d'une boule dans l'urne. n est le nombre de tirages.



	Expérience	Variable aléatoire X	Loi de X
$n = 1$	On effectue un seul tirage.	nombre de boules blanches obtenues	Bernoulli $\mathcal{B}(1\,,p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages avec remise.	nombre de boules blanches obtenues	Binomiale $\mathcal{B}(n\,,p)$
			approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ quand $n \geq 30$ et $p \leq 0{,}1$
	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche	Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1\,,p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal $\mathcal{R}(r\,,p)$
$r \geq 1$	On effectue des tirages avec remise.	nombre de tirages de boules non blanches avant d'obtenir la r-ième boule blanche	Binomiale négative $\mathcal{BN}(r\,,p)$
$n \geq 1$	On effectue n tirages sans remise.	nombre de boules blanches obtenues	Hypergéométrique $\mathcal{H}(N\,,n\,,p)$
$M = 1$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule blanche	Uniforme $\mathcal{U}(N)$ ou $\mathcal{S}(N\,,1\,,p)$
$M \geq 1$ $1 \leq r \leq M$	On effectue des tirages sans remise.	nombre de tirages pour obtenir la r-ième boule blanche	Pascal sans remise $\mathcal{S}(N\,,r\,,p)$

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$	$P(X = k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{G}(1, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, 1, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq N - M + 1\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{N-M}{k-1}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M}{N-k+1}$	$\frac{N+1}{M+1}$	$q \frac{NM(N+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

6.2 Problèmes

- uniforme discrète

63. On jette un dé bien équilibré. On considère la v.a. X qui donne le point obtenu sur la face supérieure.
Déterminer : a/ la fonction de distribution de X ; b/ la fonction de répartition de X ; c/ l'espérance mathématique et la variance de X.
Donner la représentation graphique de la fonctions de distribution et de la fonction de répartition de X

- distribution de Bernoulli

64. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules noires . On tire une boule de l'urne et on note sa couleur. II n'y a que 2 résultats possibles. C'est une épreuve de Bernoulli.
On appelle succès l'événement S : "tirer une boule rouge".
On désigne par X la v.a. qui prend la valeur 1 si S se réalise et la valeur 0 si $\bar{S}$ se réalise.
Donner la fonction de distribution (loi de probabilité) et la fonction de répartition de X.

- loi binomiale $X \sim \mathcal{B}((n, p)$

65. Avec les hypothèses de l'exercice 64, on fait 3 tirages successifs avec remises. Les trois tirage sont indépendants. On appelle A l'événement "tirer une seule boule rouge au cours de ces 3 tirages". Déterminer la probabilité de l'événement A.
Désignons par X la v.a. qui donne le nombre de boules rouges tirées au cours de ces 3 tirages.
Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la fonction de distribution de X.
X est une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 1/3$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

66. On répète 8 fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 succès au cours de ces 8 épreuves ?

67. La v.a. X suit une loi binomiale avec $n = 50$ et $p = 0,1$. Déterminer $P(X = 10)$, $E(X)$ et $Var(X)$.

68. On lance 100 fois un dé régulier. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois un 6 ? Combien de 6 peut-on espérer obtenir en moyenne ? Avec quel écart-type ?

69. 10 % des électeurs d'une commune sont défavorables à un projet de référendum sur l'avenir de la commune. On prélève, au hasard et avec remise et on enregistre l'opinion de 8 personnes dans le corps électoral de cette commune. Quelle est la probabilité pour que parmi ces 8 opinions enregistrés : a/ il y ait unanimité pour le référendum ; b/ il y ait unanimité contre le référendum ; c/ il y ait majorité pour le référendum.

70. Un examen se présente sous la forme de 20 questions. Pour chacune de ces questions, 5 réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte. Supposons qu'un étudiant

réponde au hasard à ces 20 questions. Quelle est la probabilité qu'il ait 10 réponses correctes ?

- loi hyper-géométrique $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$

71. Avec les conditions de l'exercice 64, on fait 3 tirages successifs mais sans remise. Les tirages ne sont plus indépendants. On désigne par A l'événement "tirer une boule rouge au cours de ces 3 tirages". Déterminer la probabilité de A.
Désignons par X la v.a. qui donne le nombre de boules rouge tirées au cours de ces 3 tirages. La v.a. X suit une loi hypergéométrique. Déterminer la fonction de distribution de X.
Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

- loi géométrique ou de Pascal $X \sim \mathcal{G}(p)$

72. Une urne contient 5 boules rouges et 10 boules noires. On fait des tirages successifs d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité que la première boule rouge sorte : a/ au 3-ième tirage ; b/ au 4-ième tirage ; c/ au k-ième tirage ?

73. Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. Les boules sont numérotées et indiscernables au toucher. On effectue 5 tirages successifs d'une boule jusqu'à vider l'urne (tirages exhaustifs). On appelle X la v.a. qui donne le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la fonction de distribution de X. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

- loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

74. Soit X une v.a. qui suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Déterminer a/ $P(X = 2)$; b/ $P(X < 1)$; c/ l'espérance mathématique de X ; d/ la variance de X.

75. Soit X une v.a. qui suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Déterminer : a/ $P(X \leq 2)$; b/$P(X > 1)$; c/ $P(1 \leq X < 3)$.

76. Soit X une v.a. qui suit une distribution binomiale : $X \sim B(10; 0.2)$. Déterminer : a/ $P(X = 3)$; b/ $P(X < 2)$; c/ $P(X \leq 9)$.

77. Le nombre d'appels téléphoniques arrivant dans une université par période de 15 secondes admet une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Soit X la v.a. qui donne le nombre d'appels pendant une période de 15 sec. Donner la signification et la probabilité des événements suivants : $P(X = 0)$; $P(X = 3)$; $P(X < 4)$; $P(X > 3)$.

78. Entre 14 h et 16 h le nombre moyen d'appels arrivant par minute au standard d'une compagnie est 2 appels. Trouver la probabilité que pendant une minute choisie au hasard pendant cette période il y ait : a/ aucun appel ; b/ 1 appel ; c/ moins de 4 appels ; d/ 4 appels au moins ; e/ plus de 6 appels.

79. Dans un service de réparation, on sait que l'on reçoit en moyenne 9 appels à l'heure.
Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 10 appels en une heure ?
Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus 60 appels pendant une période de 6 h de

travail ?

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

80. On a remarqué que 80 % des gens qui entrent dans un hypermarché ressortent avec au moins un achat. Si l'on prélève au hasard un échantillon de 60 personnes qui sortent, quelle est la probabilité pour que 50 d'entre elles aient effectué au moins un achat ?

81. Si 3 % des ampoules fabriquées par une usine sont défectueuses, trouver la probabilité d'avoir dans un échantillon de 100 ampoules : a/ aucune ampoule défectueuse ; b / 2 ampoules défectueuses ; c/ plus que 3 ampoules défectueuses.

Chapitre 7

Variable aléatoire continue (à densité)

7.1 Synthèse

• **Variable aléatoire continue** X **:** est une variable qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

• **Densité de probabilité :** $f(x)$ au point x est la valeur limite de la densité moyenne sur l'intervalle $(x, x + \Delta x)$ lorsque la longueur Δx de cet intervalle tend vers 0 :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Si l'intervalle est assez petit pour qu'on puisse considérer $f(x)$ comme constant :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x$$

On ne peut pas associer une probabilité à une valeur de la variable aléatoire continue. La probabilité pour que X prenne une valeur particulière x dans $\mathbb{R}$ (l'ensemble des nombres réels) est toujours nulle. Par contre **on peut associer à** x **une densité de probabilité** $f(x)$ et on peut associer à un intervalle $[x, x + \Delta x]$ une probabilité non nulle.
Les notations suivantes sont identiques

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

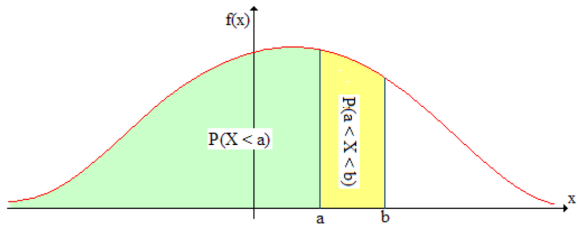
Soit une fonction f définie et continue sur V, On définit la probabilité pour que la variable aléatoire X soit comprise entre les valeurs x et $x + \Delta x$, où Δx est une quantité positive arbitrairement petite par la relation :

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x \text{ avec } [x, x + \Delta x] \subset V.$$

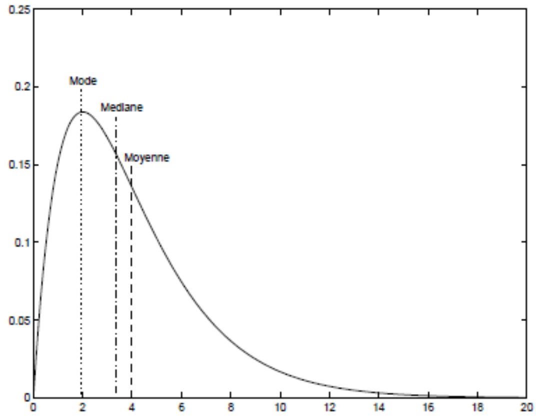
Pour que $f(x)\Delta x$ soit une probabilité, la fonction f doit satisfaire aux conditions suivantes :
pdp1. être positive : pour tout $x \in V$, $f(x) \geq 0$ (pour que P le soit) ;

pdp2. $\int_V f(x)\mathrm{d}x = 1$ (pour que $f(V) = 1$);
pdp3. être continue (pour admettre une primitive) ;
pdp4. $P(X = x) = 0$
pdp5. Si $[a, b] \subset V$, alors la probabilité attachée à l'intervalle (a, b) apparait comme $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ce qui correspond à l'aire de la surface situé au-dessous de la courbe de densité, à droite de a et à gauche de b.

Densité de probabilité



Mode, médiane et moyenne



Cette fonction $f(x)$ est appelée **densité de probabilité.**

- **Représentation d'une loi de probabilité.** Pour une variable continue on représente la fonction densité de probabilité). La forme de la courbe obtenue s'appelle la forme de la distribution : uniforme, en L, en cloche, etc.

- **Fonction de répartition d'une loi de probabilité :** La fonction cumulative de distribution, ou **fonction de distribution** ou fonction de répartition F d'une v.a. continue X, ayant une densité de probabilité f, est définie par : $F(x) = P(X < x)$, $F(x) = \int_{V_{\min}}^x f(u)\mathrm{d}u$. La fonction de répartition $F(x)$ est la primitive de la fonction de densité $f(x)$, c'est-à-dire une fonction dont la dérivée est $f(x)$. $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$.

— **Propriétés :**
pfr1. $F(V_{\min}) = 0$ et $F(V_{\max}) = 1$;
pfr2. $P(X > x) = 1 - F(x)$ pour tout réel x ;
pfr3. F est une fonction continue croissante ;
pfr4. La probabilité que X appartienne à l'intervalle (x_1, x_2), est égale, par définition, à la différence des valeurs prises par la fonction de répartition aux extrémités de l'intervalle : $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

- **Représentation graphique de la fonction de répartition :** - "courbe des probabilités cumulées". $F(x)$ représente la surface délimitée par la courbe représentation de la loi entre $-\infty$ et l'abscisse x.

- **Quantile d'ordre p :** C'est la valeur x_p de X telle que $F(x_p) = p$. Soit X une va-

riable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue et strictement croissante. Pour tout $p \in]0,1[$ nous appelons **quantile d'ordre** p la racine x_p de l'équation en x : $F(x) = p$, tel que $P(X \leq x_p) = p$ ou encore $F(x_p) = p$..
Pour $p = 1/2$, on parle de **médiane**.

• **Médiane :** La médiane $Me = \eta$ est la valeur η de X pour laquelle $P(X \leq \eta) = P(X \geq \eta) = 1/2$. La **médiane** est le quantile d'ordre 1/2.

• **Mode : Le mode** x_m est la valeur de X dont la probabilité est maximale.

• **Espérance mathématique (moyenne) :**

$$E(X) = \int_V x f(x) \mathrm{d}x$$

— **Propriétés de l'espérance mathématique :**

pe1. Soit a, $b = const.$ et X une variable aléatoire : $E(aX + b) = aE(X) + b$,

pe2. Soit X et Y deux variables aléatoires : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

pe3. Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

• **Variance :** La variance est l'espérance du carré de la variable centrée. $\sigma^2 = \int_V (x - \mu)^2 f(x) \mathrm{d}x = E(X^2) - E(X)^2$.
— **Propriétés de la variance :**

pv1. Soit $a, b = const.$ et X une variable aléatoire : $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

pv2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.

• **Variable réduite** Une variable aléatoire X est dite réduite si son écart-type est égal à 1. La variable aléatoire $\frac{X}{\sigma}$ admet une variance de 1 et est appelée variable réduite.

• **Variable centrée réduite ou standardisée** Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée (ou variable normalisée). La variable aléatoire $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est normalisée.

• **Moment d'ordre supérieur :**

— On appelle **moment d'ordre** k la grandeur : $m_k = E(X^k)$.

— Le **moment centré d'ordre** k est le moment d'ordre k de la variable centrée : $\mu_k = E[(X - E(X))^k]$.

On a donc $m_1 = E(X)$, $\quad \mu_1 = 0$, $\quad \mu_2 = Var(X)$.

• **coefficient d'asymétrie** : $\beta = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.
Donne une idée de l'importance de la dissymétrie et son signe montre si la dissymétrie provient de valeurs élevées de X (dissymétrie à droite) ou des valeurs petites de X (dissymétrie à gauche).

• **coefficient de Kurtosis :** ou aplatissement comparé à la loi Normale : $\delta = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Montre qu'une distribution est plus aplatie ou moins aplatie qu'une distribution gaussienne, toutes choses égales par ailleurs (même espérance et même variance).

Test sur le chapitre : Variable aléatoire continue (à densité)

1. Donner la définition d'une variable aléatoire continue.
2. Comment on définit la probabilité d'un événement de type $[a, b]$?
3. Exprimez la probabilité que la variable aléatoire à densité X prenne la valeur x dans l'intervalle $[a, b]$?
4. Quelles conditions doit vérifier une fonction f pour être densité de probabilité d'une variable aléatoire continue ?
5. Quel est le lien entre densité et fonction de répartition ?
6. Connaissant la fonction de répartition F de X, comment calculer $P(a < X < b)$?
7. Quelles formules permettent de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f ?

7.2 Problèmes

82. Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de fonction de répartition $F(x)$ définie par :

$$F(x) : \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2}t, & \text{si } 0 < t \leq 2 \\ 1, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Trouver la densité de probabilité, l'espérance et la variance.

83. Soit Y une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité de probabilité $f(y)$ définie par :

$$f(y) : \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-y/2}, & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Trouver la fonction de répartition, l'espérance, la variance et l'écart-type.

Chapitre 8

Lois de probabilité continues particulières

8.1 Synthèse

8.1.1 Loi uniforme continue $X \sim \mathcal{U}[a;b]$

- **Densité de probabilité** $f(x)$ **et fonction de répartition** $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

- **Paramètres descriptiffs :** N'a pas de mode ; Médiane $M_e = \frac{a+b}{2}$; Moyenne $\mu = \frac{a+b}{2}$. Variance $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

8.1.2 Distribution normale (dite de Laplace - Gauss) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ou $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- **Situation concrète :** la distribution dépend d'un *grand nombre* de causes *indépendantes*, dont les effets *s'additionnent* et dont aucune n'est *prépondérante*, alors nous serons en présence de la distribution normale.

- **Distribution de probabilité :** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \;\; \mu \geq 0; \;\; \sigma > 0.$

- **Fonction de répartition :** $F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx.$

- **Forme :** courbe en cloche

• **Les intervalles "Un, deux, trois sigma"** Les observations sont groupées autour de la moyenne :

50 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \frac{2}{3}\sigma, \mu + \frac{2}{3}\sigma)$,
68 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$,
95 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$,
99,7 %	sont dans l'intervalle	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

• **Caractéristiques de la loi normale**

Mode égal à la moyenne μ : $M_e = \mu$; **Moyenne :** μ ; **Variance :** σ^2 ; **Ecart-type :** σ.

• **Probabilité attachée à un intervalle :** La fonction de répartition d'une variable normale de paramètres (μ, σ) peut toujours s'exprimer à l'aide de la fonction de répartition $F(t) = \pi(t)$ de la loi normale centrée réduite, tabulée :

$$\begin{aligned} P(X < x) &= \pi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ P(a < X < b) &= \pi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \pi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Stabilité de la loi normale : Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes. Si X_1 suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et X_2 suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

8.1.3 Distribution normale centré réduite ou loi normale standardisée $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

La distribution normale centré réduite ou ls loi normale standardisée $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est la distribution normale de moyenne nulle et de variance égale à 1.

$$\begin{array}{lcl} X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma) & & Z \to \mathcal{N}(0, 1) \\ E(X) = \mu & Z = \frac{X-\mu}{\sigma} & E(Z) = 0 \\ Var(X) = \sigma^2 & & Var(Z) = 1 \end{array}$$

• **Fonction de densité :** $f(t)$ **et fonction de répartition :** $F(Z < t) = \pi(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

La fonction $f(t)$ est paire : $\boldsymbol{f(-t) = f(t)}$.
La courbe de densité de probabilité est donc symétrique par rapport à la droite d'abscisse $t = 0$: pour $t > 0$ $\boldsymbol{\pi(-t) = 1 - \pi(t)}$.

• **Paramètres descriptifs :** $E(Z) = 0$, $V(Z) = 1$, $\sigma = 1.$, $M_o = M_e = \mu = 0$.
Le **quantile** t_p, $(0 < p < 1)$ est la valeur de Z telle que $\pi(t_p) = p$.

• **Probabilité d'intervalles**

— **Intervalle du type $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**

A l'aide des valeurs dans la table nous pouvons calculer la probabilité d'un événement du type $a \leq Z \leq b$: $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \in [a, b]) = \pi(b) - \pi(a)$.

— **Intervalle du type $[-\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}]$** : $P(-t \leq Z \leq t) = 2P(0 \leq Z \leq t) = 2(\pi(t) - 0,5)$.

— **Intervalles remarquables :**

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,683$$
$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,954$$
$$P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,997$$

• **Intervalle centré en** 0 **de probabilité donnée :** Soit α un niveau de probabilité ($0 < \alpha < 1$).
Recherchons l'intervalle $[-t, t]$ centré en 0 tel que $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$.
Comme $(-t < Z < t) = 2\pi(t) - 1$, pour $P(-t < Z < t) = 1 - \alpha$ on obtient $2\pi(t) - 1 = 1 - \alpha$ $\Longrightarrow \pi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. A l'aide des tables nous pouvons déterminer $Z = t_p$ tel que $\pi(t_p) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

— **Cas particuliers :**

α	$Z \sim \mathcal{N}(0.1)$	$1 - \frac{\alpha}{2}$
0.20	$P(-1.282 < Z < 1.282) = 0.80$	0.9
0.10	$P(-1.645 < Z < 1.645) = 0.90$	0.95
0.05	$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$	0.975
0.01	$P(-2.576 < Z < 2.576) = 0.99$	0.995

Donc, on peut mentionner deux valeurs très utiles qu'il faut connaître :

$$t_{0.05} \approx 1.96, \quad \text{et} \quad t_{0.01} \approx 2.58 \ \text{(à } 10^2 \text{ près)}$$

$t_{0.05}$ est le réel pour lequel $P(-t_{0.05} \leq Z \leq t_{0.05}) = 0.95$ et on a donc : $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$ de même, $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) \approx 0.99$. Cela donne une idée de la répartition des valeurs de Z. Environ 95% des réalisations de Z se trouvent entre -1.96 et +1.96.

• **Lien entre la loi** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ **et la loi** $\mathcal{N}(0, 1)$ Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on peut passer de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et inversement en posant $\boldsymbol{Z = (X - \mu)/\sigma}$, ce qui entraîne $\boldsymbol{X = \sigma Z + \mu}$.

8.1.4 Détermination pratique des probabilités : usage des tables de la loi normale

Table de la fonction de répartition $\pi(t) = P(Z < t)$ de la loi normale centrée réduite. La I^{ere} valeur de t donnée par la table est $t = 0$.
Pour $t = 0$, on a $P(Z < 0) = \pi(0) = 0.50$.

1. $P(Z < 1.47)$. En lisant directement la table (ligne 1.4 et colonne 0.07), nous avons $P(Z < 1.47) = \pi(1.47) = 0.9292$,

2. $P(Z > 1.47) = 1 - P(Z < 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$.

3. $P(Z < -0.66)$. La table ne donne $P(Z < t)$ que pour $t > 0$. Lorsque $t < 0$, il faut utiliser la caractéristique de $f(t)$ qui est symétrique par rapport à $E(z) = \mu = 0$,

$$P(Z < -0.66) = \pi(-0.66) = 1 - \pi(0.66) = 1 - 0.7454 = 0.2546$$

4. $P(Z > -0.66) = P(Z < 0.66) = \pi(0.66) = 0.7454$. -symétrie par rapport à $E(z) = 0$.

5. $P(0.56 < Z < 1.24)$

$$\begin{aligned} P(0.56 < Z < 1.24) &= P(Z < 1.24) - P(Z < 0.56) \\ &= \pi(1.24) - \pi(0.56) = 0.8925 - 0.7123 \\ &= 0.1802 \end{aligned}$$

6. $P(-2 < Z < 2)$

$$\begin{aligned} P(-2 < Z < 2) &= \pi(2) - \pi(-2) = \pi(2) - (1 - \pi(2)) \\ &= \pi(2) - 1 + \pi(2) \\ &= 2\pi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

7. $P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3)$: 2 solutions sont possibles :

$$\begin{aligned} \circ \quad P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= P(Z < 1.5) + P(Z > 2.3) \\ &= \pi(1.5) + 1 - \pi(2.3) \\ &= 0.9332 + 1 - 0.9893 = 0.9439 \\ \circ \quad P(Z < 1.5 \text{ ou } Z > 2.3) &= 1 - P(1.5 < Z < 2.3) \\ &= 1 - (\pi(2.3) - \pi(1.5)) \\ &= 1 - 0.9893 + 0.9332 = 0.9439 \end{aligned}$$

8. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.8508$.
La probabilité est supérieure à $0.5 \Rightarrow t > 0$. En lisant directement la table, on voit que pour $t = 1.04$, $\pi(t) = 0.8508$.

9. Calculer t sachant que $P(Z < t) = 0.0116$.
La probabilité est inférieure à $0.5 \Rightarrow t < 0$. On sait que $\pi(-z) = 1 - \pi(t) = 0.0116$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.0116 = 0.9884 &\Rightarrow \quad t = 2.27 \\ &\Rightarrow \quad t = -2.27 \end{aligned}$$

10. Calculer t sachant que $P(Z > t) = 0.123$.
On sait que $P(Z > t) = 1 - P(Z < t) = 1 - \pi(t) = 0.123$

$$\Rightarrow \pi(t) = 1 - 0.123 = 0.877 \Rightarrow t = 1.16$$

11. Calculer t_1 et t_2 sachant que $t_2 = -t_1$ et que $P(t_1 < Z < t_2) = 0.903$.

$$\begin{array}{cl}
\text{Comme} & t_2 = -t_1 \\
\Rightarrow & \pi(t_2) - \pi(t_1) = \pi(t_2) - \pi(-t_2) \\
= & \pi(t_2) - (1 - \pi(t_2)) \\
= & 2\pi(t_2) - 1 = 0.903 \\
\Rightarrow & 2\pi(t_2) = 1.903 \Rightarrow \pi(t_2) = 0.9515 \\
 & \Rightarrow t_2 = 1.66; \quad t_1 = -1.66
\end{array}$$

Test sur le chapitre : Lois de probabilité continues

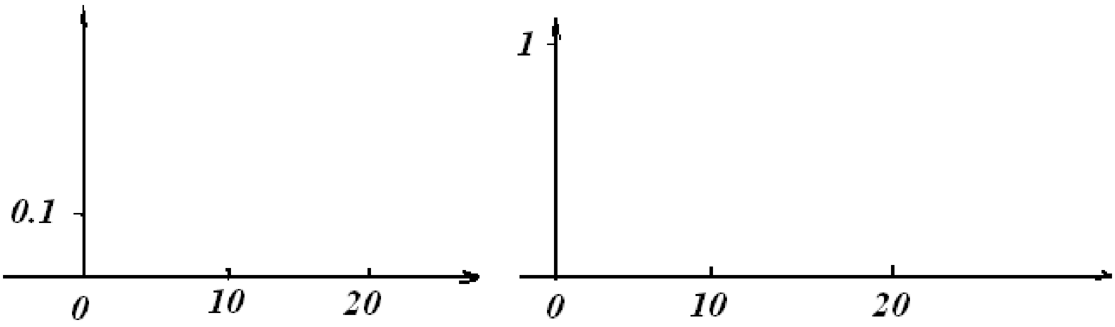
1. Décrivez la loi uniforme continue. Pour une variable aléatoire continue X, qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, donnez la fonction de répartition $f(x)$.
2. Décrivez la situation du phénomène pour que la distribution de la variable aléatoire correspondante soit indiquée comme normale.
3. Expliquez les paramètres μ et σ de la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de la loi normale.
4. Décrivez la loi normale standardisée

8.2 Problèmes

- loi uniforme continue $X \sim \mathcal{U}[a; b]$

84. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme continue : $X \sim \mathcal{U}[1; 8])$
Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 3)$; $P(X \leq 5)$. Déterminer $E(X)$.

85. Soit X une v.a. admettant une distribution uniforme continue sur l'intervalle $[0; 20]$.
a/ Déterminer la loi (ou fonction de densité) et la fonction de répartition de la v.a. X ;



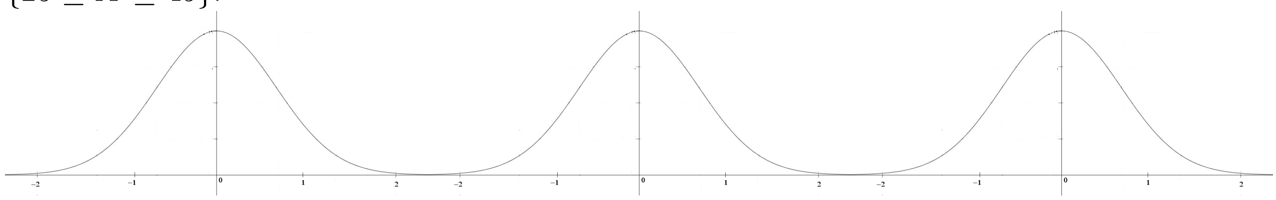
b/ Calculer $P(5 \leq X \leq 10)$; $E(X)$ et $V(X)$.

86. Le temps d'attente (en minutes) d'un résultat au cours d'un jeu électronique admet une distribution continue uniforme sur l'intervalle $[1; 6]$. Déterminer :
a/ la probabilité d'attendre au moins 4 minutes ; b/ le temps moyen d'attente.

- loi normale de Laplace-Gauss $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

87. La v.a. $X =$ "poids d'un foie gras", suit une loi $\mathcal{N}(550; 100)$. Quelle est la probabilité pour qu'un foie gras pèse moins de 650g, plus de 746g, moins de 500g, entre 550 et 600g ?

88. Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, c'est-à-dire le laps de temps entre la conception et la naissance de l'enfant, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ème et le 240-ème jour précédent l'accouchement. Quelle est la probabilité que la conception ait eu lieu à ce moment ?

89. Soit X une v.a, qui suit une distribution normale d'espérance mathématique 30 et d'écart type 5.
a/Représenter graphiquement les événements suivant : $\{X \leq 35\}$; $\{X \geq 40\}$; $\{X \leq 30\}$; $\{25 \leq X \leq 45\}$.

b/ Déterminer la v.a. centrée réduite associée à X et traduire les événements donnés à l'aide de la v.a. Z et calculer leur probabilité.
c/ Déterminer les probabilités suivantes $P(X \leq 35)$; $P(X \geq 40)$; $P(X \leq 30)$; $P(25 \leq X \leq 45)$.

90. Soit X une v.a. qui suit une distribution normale d'espérance mathématique 53 et d'écart type 10. Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq 73)$; $P(X \geq 38)$; $P(33,4 \leq X \leq 72,6)$.

91. On a établi que les bénéfices moyens quotidiens en milliers d'euros d'une entreprise sont distribués suivant la loi normale $\mathcal{N}(75; 25)$. Que représente les valeurs 75 et 25 ? Quelle est la probabilité que le bénéfice moyen quotidien soit supérieur à 80000 € ?

92. Soit X une v.a. qui suit une loi normale $X \sim \mathcal{N}(30; 5)$. Déterminer les valeurs x de cette variable pour lesquelles : $P(X \leq x) = 0,8413$; $P(X \geq x) = 0,9332$; $P(20 \leq X \leq x) = 0,9544$.

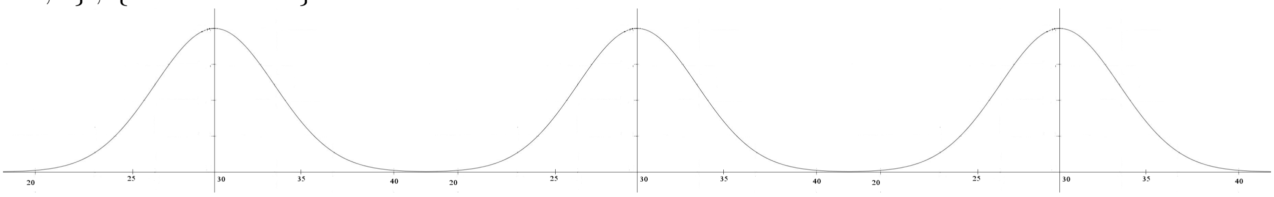
93. Soit une v.a. $X \sim \mathcal{N}(50; 10)$. Déterminer les quartiles de cette distribution.

94. Sachant que les âges d'un groupe d'étudiants sont distribués suivant la loi normale $\mathcal{N}(21; 2)$, déterminer : a/ le pourcentage théorique d'étudiants ayant au moins 23 ans
b/ l'âge au-dessous duquel on trouve 33 % des étudiants.

95. En supposant que les bénéfices quotidiens d'un magasin admettent une distribution normale de moyenne 1 000 € et d'écart-type 150 €, déterminer :
a/ la probabilité d'avoir un bénéfice quotidien supérieur ou égal à 1250 € ;
b/ la valeur des quartiles de cette distribution (arrondis au nombre entier le plus proche)

- loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

96. On considère la v.a. X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
a/Représenter graphiquement les événements suivant : $\{X < 1\}$; $\{X > 1,5\}$; $\{X < -1,5\}$; $\{-1 < X < 2\}$



b/ Déterminer les probabilités suivantes : $P(X \leq 1,47)$; $P(X \leq -1,47)$; $P(1,22 \leq X \leq 2,58)$; $P(X \geq 1,48)$; $P(X \leq 0,86)$; $P(X \geq -1,47)$; $P(X < -1,2)$; $P(X < 0)$; $P(X = 2)$.

97. On considère la v.a. Z qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer :
$P(Z \leq 1,9)$; $P(1 \leq Z \leq 2,5)$; $P(-1,2 < Z < 1,9)$; $P(-1,2 \leq Z \leq 1,2)$; $P(-1 \leq Z \leq 1)$; $P(-2 \leq Z \leq 2)$; $P(-3 \leq Z \leq 3)$; $P(-t \leq Z \leq t)$.

98. Déterminer les valeurs t de la v.a. normale centrée réduite Z pour lesquelles on a :
$P(Z \geq t) = 0,5$; $P(Z \leq t) = 0,932$; $P(Z \leq t) = 0,012$; $P(Z \geq t) = 0,975$; $P(t \leq Z \leq 3) = 0,7907$; $P(-t \leq Z \leq t) = 0,95$

Loi de probabilité continues particulières. Indications et résultats.

84. $P(X = 3) = 0$ comme X est une variable aléatoire continue ; $P(X \leq 5) = \frac{4}{7}$; $E(X) = 4,5$;

87.$P(X < 650) = 0,8413$; $P(X > 746) = 0,025$; $P(X < 500) = 0,3413$;

88. $P(X > 290 \cup X < 240) = 0,02415$.

Chapitre 9

Conditions d'application de la loi normale. Convergence en loi

9.1 Synthèse

• **Loi des grands nombres et théorème de la limite centrale ou central-limite (T.C.L.)**
Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ.

— **Théorème : La loi forte des grands nombres** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes obéissant toutes à une même loi de probabilité ayant une espérance mathématique μ. Alors avec une probabilité égale à 1, la suite des variables aléatoires

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

tend vers μ lorsque n augmente indéfiniment.
Ce résultat permet de relier la théorie à la pratique.
Nous aurons besoin, en Statistique, de préciser ceci, c'est-à-dire d'avoir une idée de la grandeur de $|\bar{X} - \mu|$. Nous nous servirons pour cela du **théorème de la limite centrale.**

— **Théorème central-limite /TCL/**
Si $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de probabilité de paramètres connus μ_1, μ_2, …, μ_n et σ_1, σ_2, …, σ_i, …, σ_n, la variable aléatoire Y définie comme la somme de ces n variables aléatoires indépendantes tend à suivre une loi normale dès que n est grand :

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n \to_{n\to\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma),$$

avec $\mu = \sum_i \mu_i$ et $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2$
ou, avec une conclusion formulée autrement

$$\sqrt{n}\left(\frac{Y}{n} - \mu\right) \to \mathcal{N}(0, \sigma), \quad \text{autre écriture} \quad \frac{Y - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0, 1).$$

Ce théorème montre encore que, bien souvent, la loi d'une variable aléatoire X est approximativement une loi gaussienne.

- **Approximation de la loi binômiale par la loi normale. Théorème de Moivre-Laplace - un cas particulier du théorème central-limite**

Si une variable aléatoire X obéit à la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$, le produit $np(1-p)$ étant grand, la variable aléatoire $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ obéit à une loi qui est proche de la loi gaussienne réduite, c.a.d.
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \to_{n\to+\infty} \mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

— L'approximation devient valable si : $npq > 9$; ou $n > 20$ et $np > 10$ et $nq > 10$; ou $n > 30$ et $np > 5$ et $nq > 5$..

— L'approximation pose le problème du passage d'une loi discrète à une loi continue.
On doit donc substituer à une valeur discrète un intervalle continu. On doit remplacer k par l'intervalle $[k-0.5, k+0.5]$. Cette substitution est qualifiée de **correction de continuité.**
Par exemple la valeur 8 est remplacée par l'intervalle $[7.5; 8.5]$ et
$P(X = 8) = P(7.5 < Z < 8.5)$.

- **Règles à utiliser pour la correction de continuité**

— pour calculer $P(X \geq x)$: soustraire 0.5 de $x \Longrightarrow P(X \geq x) = P(Z > x - 0.5)$

— pour calculer $P(X < x)$: soustraire 0.5 de $x \Longrightarrow P(X < x) = P(Z < x - 0.5)$

— pour calculer $P(X > x)$: ajouter 0.5 à $x \Longrightarrow P(X > x) = P(Z > x + 0.5)$

— pour calculer $P(X \leq x)$: ajouter 0.5 à $x \Longrightarrow P(X \leq x) = P(Z < x + 0.5)$

— $P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Dans le cas où l'intervalle considéré pour X englobe une grande partie de l'étendue totale, la correction n'a pas beaucoup d'influence.

— $P(X = a) \approx P\left(\frac{a-0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{a+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Quel que soit n, il n'est pas question de supprimer ± 0.5.

- **Approximation de la loi de Poisson par la loi de Gauss**

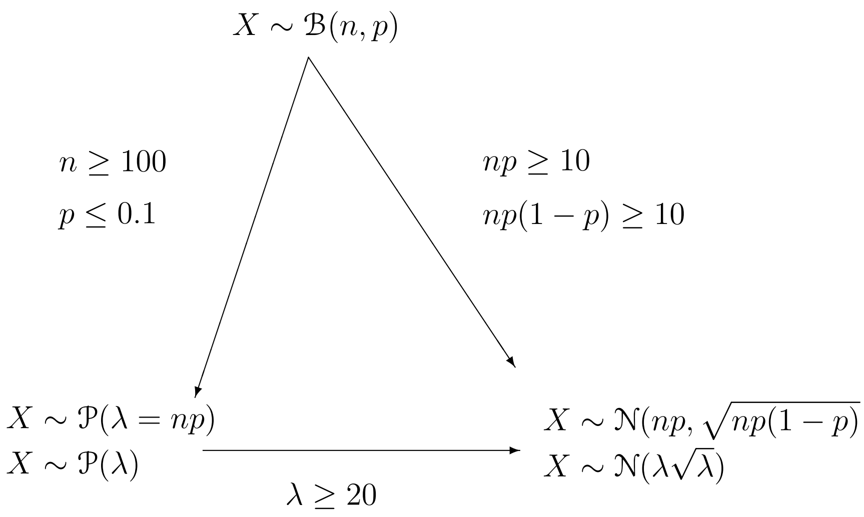
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Dans le cas où λ a une valeur suffisamment élevée, on peut considérer que X est de la loi $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Pour décider de la validité de l'approximation, le critère, d'origine empirique, généralement utilisé est : $\lambda \geq 20$.

Comme l'approximation revient à remplacer des sommes de probabilités par des intégrales ; il est donc également nécessaire d'introduire une correction de continuité.

- **Rapports mutuels des lois de probabilité binômiale et de Poisson et la loi normale**

Le schéma ci-dessous et Figure 9.1 résument les principales approximations.



Test sur le chapitre : Conditions d'application de la loi normale. Convergence en loi

1. Énoncer le théorème de la limite centrale.
2. Quelle est la base théorique pour la convergence en loi ?
3. Pourquoi on utilise la convergence en loi ?
4. Qu'est-ce que la correction de continuité et quand on la pratique ?

9.2 Problèmes

- approximation par une loi de Poisson ou une loi normale

99. On a constaté que 10 % des pièces fabriquées par une machine sont défectueuses. On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de pièces défectueuses dans un échantillon de n pièces. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Déterminer $E(X)$ et $Var(X)$.
a/ On considère un échantillon de 10 pièces Calculer $P(X = 2)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, déterminer $P(Y = 2)$
b/On considère un échantillon de 30 pièces. Calculer $P(X = 2)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$, déterminer $P(Y = 2)$
c/ On considère un échantillon de 100 pièces. Calculer $P(X < 5)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$, déterminer $P(Y < 5)$
Si Y est une v.a. qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 10$ et $\sigma = 3$, déterminer $P(Y < 5)$

d/Quelle est la probabilité que dans un échantillon de 400 pièces produites par cette machine il y ait au plus 40 pièces défectueuses ?

100. On a remarqué que 80 % des gens qui entrent dans un hypermarché ressortant avec au moins un achat. Si l'on prélève au hasard un échantillon de 60 personnes qui sortent, quelle est la probabilité pour qu'au moins 50 d'entre elles aient effectué au moins un achat ?

101. Un étudiant prend le bus pour se rendre à l'université. Le temps qui sépare l'instant où il quitte son domicile et l'instant où il arrive à l'université est distribué suivant une loi normale de moyenne 35 (min) et d'écart-type 5 (min). S'il n'a pas fait la fête la veille, il quitte son domicile 40 minutes avant le début des cours. Dans le cas contraire, une fois sur deux, il quitte son domicile 25 minutes avant le début des cours et, une fois sur deux il reste chez lui pour la journée, il estime que sa probabilité de faire la fête est de 0,2. On fait en outre l'hypothèse qu'il y a indépendance entre des événements relatifs à des journées différentes.
a/ Déterminer la probabilité qu'il reste chez lui la journée.
b/ Déterminer la probabilité qu'il arrive à l'heure à l'université.
c/ Soit X la v.a. correspondant au nombre de journées au cours d'un semestre de 13 semaines de 5 jours pendant lesquelles il est arrivé à l'heure à l'université. Déterminer l'espérance mathématique de X.

102. Le directeur marketing d'une entreprise utilise deux supports publicitaires pour vanter les charmes de son produit auprès des consommateurs potentiels, un quotidien national, et une chaîne de télévision. Les chiffres qui suivent portent sur les consommateurs potentiels du produit :
- un consommateur sur dix est touché par le journal, contre un sur cinq par la télévision ; il faut cependant noter qu'un consommateur sur vingt est touché simultanément par les deux supports.
- un consommateur sur dix achète le produit, parmi les consommateurs touchés par la publicité, contre un sur cinquante parmi ceux qui ne sont pas touchés.
a/ Calculer la probabilité pour qu'un consommateur soit touché par la publicité.
b/ On choisit un consommateur au hasard, et on appelle succès le fait qu'il soit acheteur du produit. Quelle est la probabilité du succès ?
On suppose qu'il y a 10 000 consommateurs parmi lesquels on choisit au hasard 100 consommateurs différents. On note X la variable aléatoire réelle associée au "nombre d'acheteurs parmi les cent consommateurs choisis"
c/ Quelle est la loi de probabilité exacte du nombre de X ? Préciser ses paramètres. Déterminer son espérance et sa variance.
d/ Par quelle(s) loi(s) discrète(s) peut-on approximer la loi de X ? Justifier votre réponse et préciser ses paramètres. Indiquer l'espérance et la variance correspondant à chaque approximation.
e/ Évaluer alors les probabilités : $P(X = 2)$ et $P(1 < X < 5)$, en utilisant ces deux approximations tour à tour.
f/ Pourquoi l'approximation normale de la loi de X n'est-elle pas entièrement justifiée ? Comparer les résultats précédents à ceux que donne l'approximation normale.

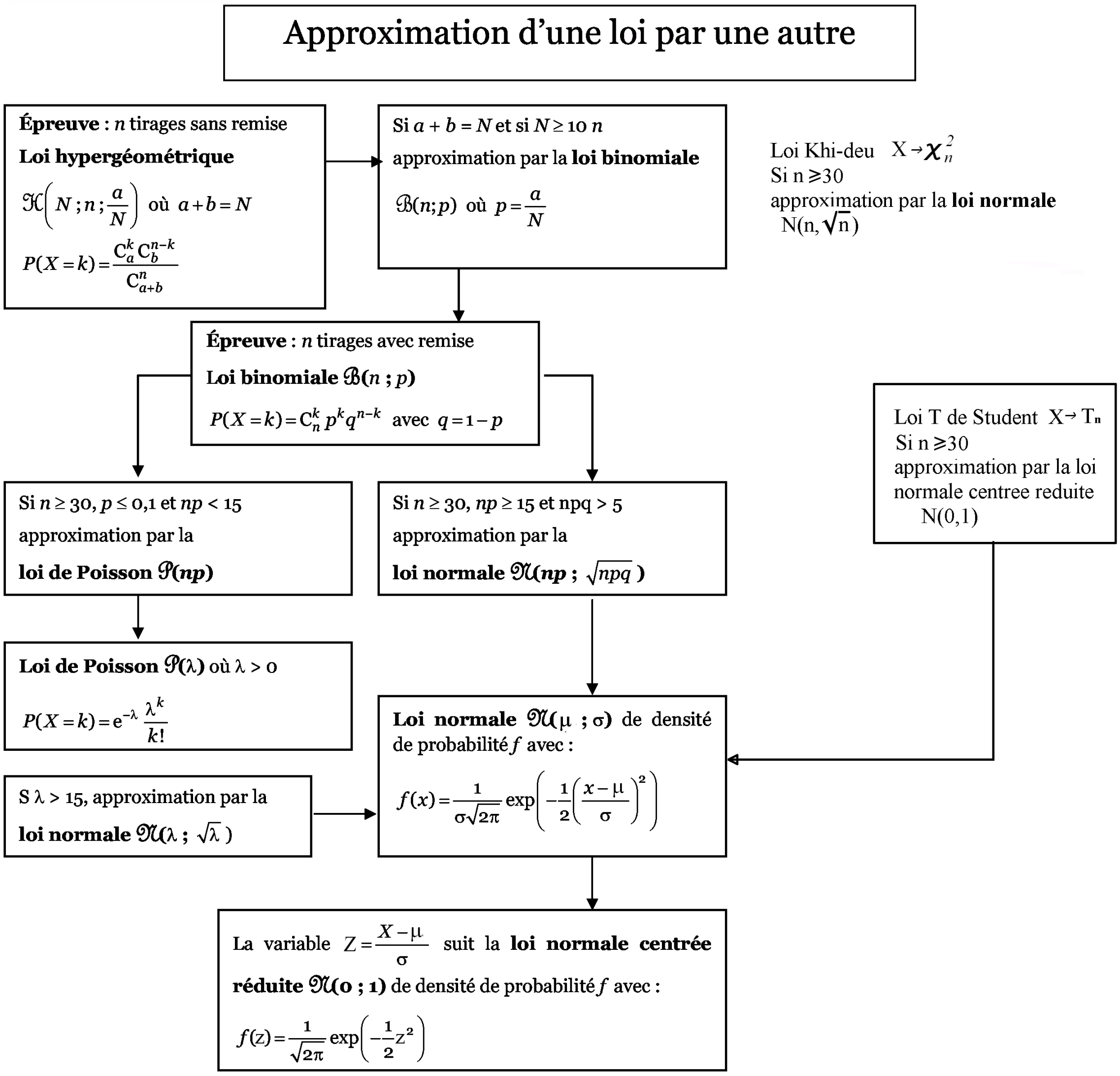


FIGURE 9.1 : Convergence en loi

Chapitre 10

Fonctions de variables aléatoires

10.1 Synthèse

• **Addition de variables aléatoires indépendantes**

— **Additivité de deux variables indépendantes binômiales** On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$. Lorsque X et Y sont indépendantes,

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + n', p).$$

— **Additivité de deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson** Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, sont deux variables indépendantes suivant la loi de Poisson,alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

— **Additivité de deux variables indépendantes normales** Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) \quad \text{et} \quad aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}).$$

• **Fonctions non linéaires de variables aléatoires**

— **La loi de "Khi-deux" $X \sim \chi^2_\nu$.**

La loi de Pearson ou loi du khi-deux (χ^2) est importante, non pas, comme les lois précédemment étudiées, pour la représentation de séries statistiques observées, mais en raison du rôle qu'elle joue dans les tests statistiques, notamment dans le test de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution observée, le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs et pour déterminer la loi de la variance d'un échantillon. Ce sont les test du khi-deux.

Définition : Soit X_1, X_2, …, X_i, …, X_ν ν variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.
La variable aléatoire X définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$$

admet une loi de probabilité désignée par χ^2 et appelée “Khi-deux” (ou “Khi-carré”) à ν degrés de liberté.

Densité de probabilité : La variable aléatoire $X \sim \chi^2_\nu$ varie entre 0 et l'infinie et a pour densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ c_\nu x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

c_ν étant une constante positive dépendant de ν, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Forme : dissymétrique avec étalement vers la droite. Tend à devenir symétrique lorsque le nombre ν de degrés de liberté augmente.

Paramètres descriptifs :

$$E(X) = \nu, \quad Var(X) = 2\nu.$$

Somme de deux variables qui suivent une loi du χ^2
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes obéissant respectivement aux lois de Pearson à m et n degrés de liberté ; leur somme $X + Y$ obéit à la loi de Pearson à $m + n$ degrés à liberté :

$$X \sim \chi^2_n, Y \sim \chi^2_m \Rightarrow X + Y \sim \chi^2_{n+m}.$$

Respectivement pour la soustraction on a : Si $X \sim \chi^2_n$ et $Y \sim \chi^2_m$ sont indépendantes, alors

$$X - Y \sim \chi^2_{n-m} \ (n > m)$$

Approximation par une loi normale : A mesure que ν augmente, la loi du χ^2 tend vers la loi normale.

Utilisation de la table de Pearson :
Table 7 donne la la fonction de répartition $F(\chi^2) = P(X \leq \chi^2)$, c.a.d. la valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.
Soit la relation $F(u) = P(\chi^2_\nu < u) = p$. La table 5 donne, pour un certain nombre de valeurs p, u en fonction de ν.

— **La loi “t-de Student “$T \sim T_n$:** La loi de Student (ou loi de Student-Fisher) est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur une échantillon (Test de Student). Student est le pseudonyme du statisticien anglais William Gosset qui travaillait comme conseiller à la brasserie Guinness et qui publia en 1908 sous ce nom, une étude portant sur cette variable aléatoire.

Définition : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite et Y une variable aléatoire suivant une loi de “Khi-deux” à n degrés de liberté : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. X et Y étant indépendantes, on dit que la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$$

admet une distribution de “Student” à n degrés de liberté.

Densité de probabilité :
La fonction densité de probabilité $f(t)$ d'une variable $T \sim T_n$ a pour expression

$$f(t) : t \to C(n)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où $C(n)$ est une constante positive dépendant de n et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Forme de la distribution : en cloche, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et un peut plus aplatie que la distribution normale centrée réduite. Admet pour mode : 0.

Paramètres descriptifs

$$E(T_n) = 0 \quad \text{si} \quad n > 1; \quad Var(T_n) = \frac{n}{n-2} \quad \text{si} \quad n > 2$$

Approximation par la loi normale : En pratique : si $T \sim T_n$ pour $n \geq 30$, on pourra écrire que $T \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Utilisation de la table de Student : La Table 9 donne la valeur $t_{\alpha,n}$ définie par $P(|T| > t_{\alpha,n}) = \alpha$.
La Table 10. donne la valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée.
La table Table 11. permet d'obtenir u, pour certaines valeurs de p, selon le nombre de degrés de liberté de la variable de Student.

Test sur le chapitre : Fonctions de variables aléatoires

1. Loi de Khi deux, utilisation.

2. Loi de Student, utilisation.

10.2 Problèmes

Addition de variables aléatoires indépendantes

103. Si deux v.a, indépendantes X_1 et X_2 ont pour moyennes respectives $\mu_1 = 4$ et $\mu_2 = 6$ et pour variances respectives $\sigma_1^2 = 9$ et $\sigma_2^2 = 15$, calculer :
$E(X_1 + X_2)$ et $Var(X_1 + X_2)$; $E(4X_1 - 3X_2)$ et $Var(4X_1 - 3X_2)$.

104. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes telles que $Var(X_1) = k$ et $Var(X_2) = 4$. Si on sait que $Var(3X_1 - X_2) = 25$, déterminer k.

105. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et $X_1 \sim \mathcal{B}(4; 0,5)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(3; 0,5)$. $Y = X_1 + X_2$. Déterminer $P(Y = 2)$; $P(Y < 2)$.

106. Soit X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et $X_1 \sim \mathcal{P}(2)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(3)$. $Y = X_1 + X_2$. Déterminer $P(Y = 2)$; $P(Y \leq 2)$; $P(Y > 4)$; $P(2 < Y \leq 5)$.

107. Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent toutes deux une loi normale : $X_1 \sim \mathcal{N}(12; 2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(15; 3)$.
Déterminer les lois des v.a. $Y = X_1 + X_2$ et $Y = X_1 - X_2$.

108. Soit les v.a. $X_1 \sim \mathcal{N}(45; 4)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(45; 3)$, déterminer la loi de la v.a. $D = X_1 - X_2$.
Déterminer les probabilités $P(D > 5)$; $P(-4 \leq D \leq 4)$.
Déterminer les valeurs de x telles que $P(D \leq x) = 0,95$; $P(-x \leq D \leq x) = 0,95$.

FONCTION NON LINEAIRE DE VARIABLES ALEATOIRES
-loi du "Khi-deux" - loi "t-de Student

109. Soit la v.a. $X \sim \chi_3^2$. Déterminer les valeurs de x de cette variable pour lesquelles :
$P(X > x) = 0,10$; $P(X > x) = 0,05$; $P(X > x) = 0,01$.

110. Soit la v.a. $X \sim \chi_6^2$. Déterminer les probabilités suivantes :
$P(X \leq 10,645)$; $P(X \leq 16,812)$; $P(X \geq 12,592)$; $P(10,645 \leq X \leq 12,592)$.

111. Soit la v.a. $X \sim \chi_\nu^2$. Trouver les valeurs critiques de χ_ν^2 pour lesquelles l'aire de l'extrémité droite de la distribution du χ_ν^2 vaut 0,05 lorsque : a/ $\nu = 15$; b/ $\nu = 21$; c/ $\nu = 27$.

112. Soit la v.a. $X \sim \chi_{10}^2$. Déterminer les quantiles d'ordre 0,90 ; 0,95 ; 0,99.

113. La v.a. X suit une loi de Student à 22 degrés de liberté. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles : $P(X < t) = 0,10$; $P(X > t) = 0,05$; $P(X < t) = 0,95$; $P(X > t) = 0,025$; $P(-t < X < t) = 0,90$; $P(-t < X < t) = 0,95$; $P(-t < X < t) = 0,99$.

Chapitre 11

Exercieces de révision

114. Le service comptable d'une compagnie d'assurances a évalué la montant de la cotisation annuelle d'un contrat d'assurance complémentaire proposé depuis plusieurs années, et en a établi que cette cotisation est normalement distribuée avec une moyenne $\mu = 500e$ et un écart-type $\sigma = 50e$. On notera par X : "Le montant de la cotisation annuelle des assurés"
a) Déterminer puis interpréter la valeur du coefficient de variation du montant de la cotisation annuelle des assurés ?
b) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle inférieure à $440e$?
c) Quelle est la probabilité qu'un contrat d'assurance, choisi au hasard, ait une cotisation annuelle supérieure à $560e$?
d) Entre quelles valeurs autour de la moyenne se situe la cotisation des 95% des assurés ?
e) Sur les 3600 assurés de cette compagnie, combien auront une cotisation annuelle comprise entre $440e$ et $560e$?
f) 25% des contrats de cette compagnie, ont une cotisation annuelle inférieure ou égale à quelle valeur ?
g) Les 10% des contrats ayant des cotisations les plus élevées, ont une cotisation supérieure à quelle valeur ?
h) En supposant que l'écart-type reste inchangé, à quel montant moyen doit être fixée la cotisation de sorte que seulement 5% des assurés auront une cotisation annuelle supérieure à $564,08e$?

115. Le responsable d'une compagnie d'assurances a effectué une compilation du nombre de sinistres qui se sont produits ces dernières années. Ceci a permis d'établir que le taux moyen de sinistres enregistrés par la compagnie a été de 2,5 sinistres par jour. En admettant que le nombre de sinistres en une journée obéit à la loi de Poisson,
- Représenter graphiquement la distribution de probabilité de X et sa fonction de répartition $F(X)$.
- Quelle est la probabilité que cette compagnie n'enregistre aucun sinistre dans la journée ?
- Quelle est la probabilité que cette compagnie enregistre plus de 3 sinistres par jour ?
- Sur une période d'une année, quel est vraisemblablement le nombre de jours où la compagnie n'a enregistré aucun sinistre ?

- Calculer la probabilité d'avoir un nombre de sinistres compris entre le taux moyen de sinistres plus ou moins un écart-type.
- Quel est le nombre de sinistres par jour le plus probable et quelle est sa probabilité ?

116. Une compagnie d'assurances considère que la probabilité pour un automobiliste d'avoir un accident par mois est de l'ordre de 0.1%. Cette compagnie dispose de 2000 contrats (les accidents sont supposés indépendants).
1)Reconnaître la loi exacte du nombre d'accidents/mois de cette compagnie parmi les 2000 contrats d'assurance automobile.
2) Combien d'accidents en moyenne, cette compagnie peut-elle enregistrer au cours d'un mois donné ?
3) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun accident un mois donné ? Moins de 2 accidents/mois ?
4) Par quelle loi discrète peut-on approcher la loi de X ? En déduire les valeurs approchées des probabilités précédentes.

117. Considérons une aire d'autoroute avec petit commerce et station service. Soit la variable aléatoire X égale au nombre de personnes s'arrêtant à cette station service en une période de 15 minutes. Après enquête, supposons que la loi de probabilité de X soit donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4+
$P(X = k)$	p_0	0,2	0,4	p_3	0,1

La probabilité pour qu'une personne s'arrêtant à la station service prenne du super sans plomb est supposée être égale à 0,4.

1) Sachant que $p_3 = 2p_0$, compléter puis représenter la distribution de probabilité de X.
2) Définir puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
3) Déterminer la probabilité que le garage ait moins de trois demandes dans la journée.
4) Calculer $E(X)$, le nombre moyen de personnes s'arrêtant en 15 minutes, et l'écart-type $\sigma(X)$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes prenant du super sans plomb en une période de 15 minutes.

5) Pour tout i de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, trouver la loi de Y sachant $X = i$.

118. On considère le stock d'un produit d'une entreprise. On note X la quantité stockée au début d'une journée donnée, Y les entrées en stock au cours de la journée et Z les sorties du stock. X, Y et Z sont des variables aléatoires supposées indépendantes qui suivent les lois usuelles suivantes :

$X \sim P(20)$: loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$,

$Y \sim \mathcal{B}(30, 0, 60)$: loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0, 60$,

$Z \sim \mathcal{N}(25, 3)$: loi normale de moyenne $\mu = 25$ et d'écart-type $\sigma = 3$ unités.
a) Donner une valeur approchée de $P(X > 10)$; la probabilité d'avoir plus de 10 produits en stock en début de journée.
b) Donner une valeur approchée de $P(Y \leq 15)$; la probabilité d'avoir au plus 15 produits

en entrée de stock au cours d'une journée donnée.
Soit $W = X + Y - Z$, la quantité restant en stock en fin de journée.
c) Quelle est la loi approchée de W ? En déduire son espérance mathématique E(W) et sa variance $V(W)$.
d) Calculer la probabilité d'une rupture de stock.

119. D'après le responsable commercial d'une entreprise, les demandes mensuelles du produit sont indépendantes et suivent une loi normale. Il précise également qu'il y a une probabilité de 27,40% pour que la demande mensuelle soit inférieure à 105 unités et une probabilité de 2,50% d'être supérieure à 169 unités.
a) Déterminer la demande mensuelle moyenne ainsi que l'écart-type de cette demande.
b) Quelle est la loi suivie par la demande annuelle. En déduire son espérance mathématique ainsi que son écart-type ?
Les coûts fixes annuels de production sont de 20250 € alors que le coût unitaire est de 25 €. Le prix de vente du produit est de 40 €.
c) Quelle est la probabilité que le seuil de rentabilité annuel soit atteint

Schémas

Événements

au moins	$\geq$	plus de	$>$
moins de	$<$	au plus	$\leq$

A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A et B compatibles	$A \cap B \neq \emptyset$

Combinatoire

	sans répétition	avec répétition
A Arrangements choix, ordre	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$\bar{A}_n^p = n^p$
P Permutations ordre	$P_n = n!$	$\bar{P}_p^{p_1 p_2 \dots p_n} = \frac{p!}{p_1! p_2! \dots p_n!}$
C Combinaisons choix	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$

Probabilités

loi de multiplication	
A et B indépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
A et B dépendants	$P(A \cap B) = P(A) * P(B\|A)$
loi d'addition	
A et B incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A et B compatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Modèle d'urne

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs avec remise	ordonné	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$\bar{A}_n^p = n^p$
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Simultanés	sans ordre		$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Cas possibles lors des différents modes de tirages

mode de tirage	non exhaustif	exhaustif
successif avec remise	$\bar{A}_n^p = n^p$	$\bar{A}_n^n = n^n$
successif sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_n^n = P_n = n!$
simultané	$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$	1

Urne contenant deux sortes de boules :
N_1 boules de type A ; N_2 de type B ; $N_1 + N_2 = N$, $p = \frac{N_1}{N}$
L'événement $E_k =$ "prélever k boules du type A parmi les n tirées"
Probabilité de l'événement E_k :

	successif avec remise	successif sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	$\bar{P}_n^{k,n-k} = C_n^k$	——
choix d'éléments	$p^k(1-p)^{n-k}$	$\frac{A_{N_1}^k A_{N_2}^{n-k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k . C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$
$P(E_k)$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$

Urne $\mathscr{U}$ contenant N boules de k couleurs différentes

N_i le nombre de boules de la couleur i ;

$p_i = \frac{N_i}{N}$ proportion de boules de la couleur i dans l'urne ; $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

$A(n_1, \ldots, n_k)$ - l'événement de tirer n boules, dont exactement n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2,..., et n_k boules de la couleur k.

Probabilité de l'événement $A(n_1, \ldots, n_k)$:

	successif avec remise	successif sans remise	simultané
choix d'emplacements	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	——
choix d'éléments	$p_1^{n_1}.p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$	$\frac{A_{N_1}^{n_1} A_{N_2}^{n_2} \ldots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1}.C_{N_2}^{n_2} \ldots C^{n_k} N_k}{C_N^n}$
$P(A(n_1, n_2, \ldots, n_k))$	$\bar{P}_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} p_1^{n_1}.p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$	$\frac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_k}^{n_k}}{C_N^n}$

Choix de la loi discrete pour une variable aléatoire

Conditions d'application : 2 issues possibles de probabilité p pour le succès

Nombre de tirages	Mode de tirage	Définition de la variable aléatoire X	Loi
1	———	Nombre de succès	Bernoulli $B(1, p)$
$n > 1$	avec remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$
		Nombre de tirages pour le I succès	Géometrique $\mathcal{G}(p)$
		Nombre de succès dans l'intervalle t	Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda = p * t$
	sans remise	Nombre de succès parmi les n tirages	Hypergéometrique $\mathcal{H}(N, n, p)$

Lois usuelles discrètes

Dans une urne, il y a N boules parmi lesquelles M de couleur blanche, $p = \frac{M}{N}$ et $q = 1 - p$.

Loi de X	Ensemble des valeurs possibles de X	Probabilités des valeurs de X	Espérance de X	Variance de X
		Lois usuelles discrètes finies		
Uniforme $\mathcal{U}(N)$	$\{1, \ldots, N\}$	$P(X = k) = \frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$[\max(0; n - N + M); \min(n; M)]$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$
		Lois usuelles discrètes infinies		
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ ou $\mathcal{R}(1, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = p\, q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal $\mathcal{R}(r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; k \geq r\}$	$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r\, q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Pascal sans remise $\mathcal{S}(N, r, p)$	$\{k \in \mathbb{N}; r \leq k \leq N - M + r\}$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{r-1} \times \binom{N-M}{k-r}}{\binom{N}{k-1}} \times \frac{M-r+1}{N-k+1}$	$r \frac{N+1}{M+1}$	$rq \frac{N(N+1)(M-r+1)}{(M+1)^2(M+2)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Binômiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r\, q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Lois usuelles continues

Loi	**Notation**	**Ensemble image** V de X	Densité de probabilité $f(x)$	Fonction de répartition $F(X)$	Moyenne μ	Variance σ^2
Uniforme	$X \sim \mathcal{U}[a;b]$	$[a;b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Laplace - Gauss	$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	μ	σ^2
Normale centrée réduite	$X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	Table de $\mathcal{N}(0,1)$	0	1
Khi-deux	$X \sim \chi^2_\nu$ $= \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$	$\mathbb{R}$ $X \sim \mathbb{N}(0,1)$		Table de χ^2_ν	ν	2ν
Student	$T \sim T_n$ $= \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $Y \sim \chi^2_n$	$\mathbb{R}$		Table de T_n	0	$\frac{n}{n-2}$

Additivité

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}(n',p)$, **indépendantes** $\rightarrow X+Y \sim \mathcal{B}(n+n',p)$.

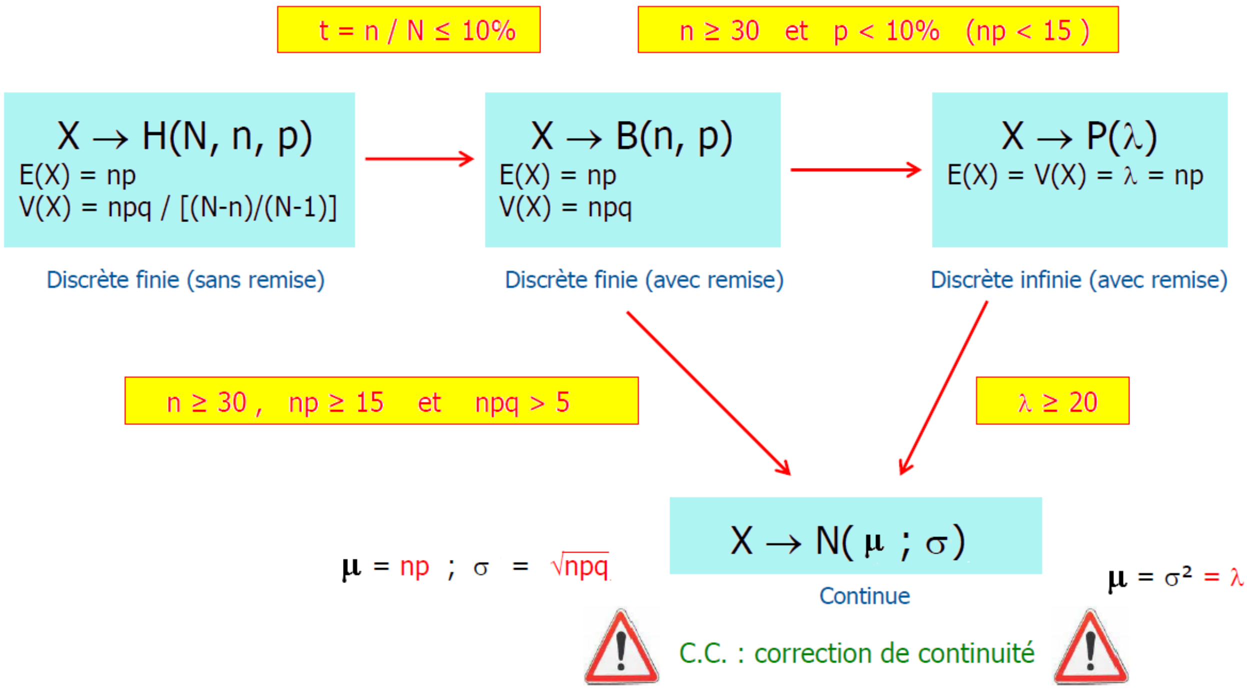
$X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, **indépendantes** $\rightarrow X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$, **indépendantes,** $a,b \in \mathbb{R} \rightarrow$

$$aX \pm bY \sim \mathcal{N}(a\mu_1 \pm b\mu_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}).$$

$X \sim \chi^2_n$, $Y \sim \chi^2_m$, **indépendantes** $\rightarrow X \pm Y \sim \chi^2_{n\pm+m}$ $(n>m)$.

Convergence en loi



Pour $\nu \geq 30$ $X \sim \chi^2_\nu \to \mathcal{N}(\nu, \sqrt{2\nu})$.
Pour $n \geq 30$ $T \sim T_n \to \mathcal{N}(0, 1)$.

Bibliographie

[1] Anderson, Sweeney et Williams. *Statistiques pour l'économie et la gestion*, 2010, De Boeck, Bruxelles

[2] Banks, J., et Meikes, R.G. *Handbook of Tables and Graphs for the Industrial Engineer and Manager*, 1984, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.

[3] B. Belletante, B. Romier *Mathématiques et gestion. Lest outils fondamentaux.* Ellipses, Paris, 1991.

[4] Berrondo-Agrell Marie et Fourastie Jacqueline. *Pour comprendre les probabilités*, 1994, Paris, Hachette, "Les Fondamentaux".

[5] Bouget D. et Vienot A. *Traitement de l'information : statistiques et probabilités*, 1995, Vuibert, Paris.

[6] Burington, R.S., et May, D.C. *Handbook of Probability and Statistics with Tables*, 1970. 2e éd., New York, McGraw-Hill Book Company.

[7] Calot G. *Cours de calcul de probabilités*, 1989, Dunod, Paris

[8] Giard V. *Statistique appliquée à la gestion*, 1995, Economica, Paris.

[9] Delsart V. et Vaneecloo N. *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*, 2010 PU du Septemtrion, Lille.

[10] Droesbeke J-J. *Éléments de statistique*, 1997, Ellipses , Bruxelles.

[11] Dumoulin D. *Mathématiques de gestion. Cours et applications.* Economica, Paris, 1987.

[12] Grais B. *La statistique et l'intreprise. Les techniques statistiques, tome 2 : Les instruments d'analyse.* Economica, Paris, 1987.

[13] Hoel P. *Statistique mathématique.* Armand Colin, Paris, 1984.

[14] Jaffard P. *Initiation aux meéthodes de la statistique et du calcul des probabilités.* Masson, Paris, 1990.

[15] Justens D. *Statistique pour décideurs*, 1990, De Boeck, Bruxelles.

[16] Lecoutre J.-P. *Statistique et probabilités*, 2000, Dunod, Paris.

[17] Lipschitz, Seymour. *Probabilité. Cours et problèmes*, 1993, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[18] Micula S. *Probability and statistics for computational sciences.* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[19] Saporta, Gilbert. *Probabilité, analyse des données et statistique*, 2006, Paris, éditions Technip.

[20] Spiegel, Murray R. *Probabilité et statistique. Cours et problèmes*, 1981, Paris, éditions McGraw-Hill, série Schaum.

[21] Vekermans D. *Probabilité et statistique.* `http://vekemans.free.fr/Proba.pdf`

[22] Wonnacott, Thomas H. et Wonnacott, Ronald J. *Statistique*, 1991, éditions Econimica.

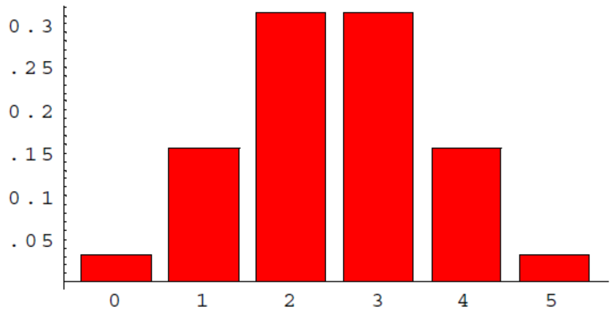
Annexe

Tables statistiques

Table 1. Distribution binomiale

Cette table donne la probabilité d'obtenir k succès en n tirages étant donné une probabilité p de succès sur un tirage.
Exemple : la probabilité d'obtenir 1 succès sur 5 tirages à pile ou face est de 0,1563.

$$\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k (1-p)^{n-r}}$$



		p									
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

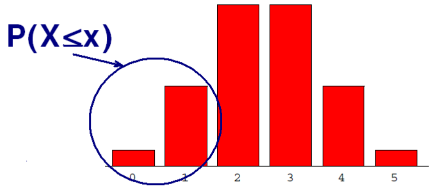
n	k	p = 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

		p									
n	**k**	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052

n	k	p 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 2. Fonction de répartition binomiale

Fournit la probabilité $P(X \leq x)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$



		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
2	0	.903	.810	.772	.640	.563	.490	.423	.360	.303	.250
	1	.998	.990	.978	.960	.938	.910	.878	.840	.798	.750
3	0	.857	.729	.614	.512	.422	.343	.275	.216	.166	.125
	1	.993	.972	.939	.896	.844	.784	.718	.648	.575	.500
	2	1.000	.999	.997	.992	.984	.973	.957	.936	.909	.875
4	0	.815	.656	.522	.410	.316	.240	.179	.130	.092	.063
	1	.986	.948	.890	.819	.738	.652	.563	.475	.391	.313
	2	1.000	.996	.988	.973	.949	.916	.874	.821	.759	.687
	3		1.000	.999	.998	.996	.992	.985	.974	.959	.938
5	0	.774	.590	.444	.328	.237	.168	.116	.078	.050	.031
	1	.977	.919	.835	.737	.633	.528	.428	.337	.256	.188
	2	.999	.991	.973	.942	.896	.837	.765	.683	.593	.500
	3	1.000	1.000	.998	.993	.984	.969	.946	.913	.869	.813
	4			1.000	1.000	.999	.998	.995	.990	.982	.969
6	0	.735	.531	.377	.262	.178	.118	.075	.047	.028	.016
	1	.967	.886	.776	.655	.534	.420	.319	.233	.164	.109
	2	.998	.984	.953	.901	.831	.744	.647	.544	.442	.344
	3	1.000	.999	.994	.983	.962	.930	.883	.821	.745	.656
	4		1.000	1.000	.998	.995	.989	.978	.959	.931	.891
	5				1.000	1.000	.999	.998	.996	.992	.984
7	0	.698	.478	.321	.210	.133	.082	.049	.028	.015	.008
	1	.956	.850	.717	.577	.445	.329	.234	.159	.102	.063
	2	.996	.974	.926	.852	.756	.647	.532	.420	.316	.227
	3	1.000	.997	.988	.967	.929	.874	.800	.710	.608	.500
	4		1.000	.999	.995	.987	.971	.944	.904	.847	.773
	5			1.000	1.000	.999	.996	.991	.981	.964	.938
	6					1.000	1.000	.999	.998	.996	.992
8	0	.663	.430	.272	.168	.100	.058	.032	.017	.008	.004
	1	.943	.813	.657	.503	.367	.255	.169	.106	.063	.035
	2	.994	.962	.895	.797	.679	.552	.428	.315	.220	.145
	3	1.000	.995	.979	.944	.886	.806	.706	.594	.477	.363
	4		1.000	.997	.990	.973	.942	.894	.826	.740	.637
	5			1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.912	.855
	6				1.000	1.000	.999	.996	.991	.982	.965
	7						1.000	1.000	.999	.998	.996
9	0	.630	.387	.232	.134	.075	.040	.021	.010	.005	.002
	1	.929	.775	.599	.436	.300	.196	.121	.071	.039	.020
	2	.992	.947	.859	.738	.601	.463	.337	.232	.150	.090
	3	.999	.992	.966	.914	.834	.730	.609	.483	.361	.254
	4	1.000	.999	.994	.980	.951	.901	.828	.733	.621	.500
	5		1.000	.999	.997	.990	.975	.946	.901	.834	.746
	6			1.000	1.000	.999	.996	.989	.975	.950	.910
	7					1.000	1.000	.999	.996	.991	.980
	8							1.000	1.000	.999	.998
10	0	.599	.349	.197	.107	.056	.028	.013	.006	.003	.001
	1	.914	.736	.544	.376	.244	.149	.086	.046	.023	.011
	2	.988	.930	.820	.678	.526	.383	.262	.167	.100	.055
	3	.999	.987	.950	.879	.776	.650	.514	.382	.266	.172
	4	1.000	.998	.990	.967	.922	.850	.751	.633	.504	.377
	5		1.000	.999	.994	.980	.953	.905	.834	.738	.623
	6			1.000	.999	.996	.989	.974	.945	.898	.828
	7				1.000	1.000	.998	.995	.988	.973	.945
	8						1.000	.999	.998	.995	.989
	9							1.000	1.000	1.000	.999

		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
11	0	.569	.314	.167	.086	.042	.020	.009	.004	.001	.000
	1	.898	.697	.492	.322	.197	.113	.061	.030	.014	.006
	2	.985	.910	.779	.617	.455	.313	.200	.119	.065	.033
	3	.998	.981	.931	.839	.713	.570	.426	.296	.191	.113
	4	1.000	.997	.984	.950	.885	.790	.668	.533	.397	.274
	5		1.000	.997	.988	.966	.922	.851	.753	.633	.500
	6			1.000	.998	.992	.978	.950	.901	.826	.726
	7				1.000	.999	.996	.988	.971	.939	.887
	8					1.000	.999	.998	.994	.985	.967
	9						1.000	1.000	.999	.998	.994
	10								1.000	1.000	1.000
12	0	.540	.282	.142	.069	.032	.014	.006	.002	.001	.000
	1	.882	.659	.443	.275	.158	.085	.042	.020	.008	.003
	2	.980	.889	.736	.558	.391	.253	.151	.083	.042	.019
	3	.998	.974	.908	.795	.649	.493	.347	.225	.134	.073
	4	1.000	.996	.976	.927	.842	.724	.583	.438	.304	.194
	5		.999	.995	.981	.946	.882	.787	.665	.527	.387
	6		1.000	.999	.996	.986	.961	.915	.842	.739	.613
	7			1.000	.999	.997	.991	.974	.943	.888	.806
	8				1.000	1.000	.998	.994	.985	.964	.927
	9						1.000	.999	.997	.992	.981
	10							1.000	1.000	.999	.997
	11									1.000	1.000
13	0	.513	.254	.121	.055	.024	.010	.004	.001	.000	.000
	1	.865	.621	.398	.234	.127	.064	.030	.013	.005	.002
	2	.975	.866	.692	.502	.333	.202	.113	.058	.027	.011
	3	.997	.966	.882	.747	.584	.421	.278	.169	.093	.046
	4	1.000	.994	.966	.901	.794	.654	.501	.353	.228	.133
	5		.999	.992	.970	.920	.835	.716	.574	.427	.291
	6		1.000	.999	.993	.976	.938	.871	.771	.644	.500
	7			1.000	.999	.994	.982	.954	.902	.821	.709
	8				1.000	.999	.996	.987	.968	.930	.867
	9					1.000	.999	.997	.992	.980	.954
	10						1.000	1.000	.999	.996	.989
	11								1.000	.999	.998
	12									1.000	1.000
14	0	.488	.229	.103	.044	.018	.007	.002	.001	.000	.000
	1	.847	.585	.357	.198	.101	.047	.021	.008	.003	.001
	2	.970	.842	.648	.448	.281	.161	.084	.040	.017	.006
	3	.996	.956	.853	.698	.521	.355	.220	.124	.063	.029
	4	1.000	.991	.953	.870	.742	.584	.423	.279	.167	.090
	5		.999	.988	.956	.888	.781	.641	.486	.337	.212
	6		1.000	.998	.988	.962	.907	.816	.692	.546	.395
	7			1.000	.998	.990	.969	.925	.850	.741	.605
	8				1.000	.998	.992	.976	.942	.881	.788
	9					1.000	.998	.994	.982	.957	.910
	10						1.000	.999	.996	.989	.971
	11							1.000	.999	.998	.994
	12								1.000	1.000	.999
	13										1.000

		p									
n	X	*.05*	*.10*	*.15*	*.20*	*.25*	*.30*	*.35*	*.40*	*.45*	*.50*
15	0	.463	.206	.087	.035	.013	.005	.002	.000	.000	.000
	1	.829	.549	.319	.167	.080	.035	.014	.005	.002	.000
	2	.964	.816	.604	.398	.236	.127	.062	.027	.011	.004
	3	.995	.944	.823	.648	.461	.297	.173	.091	.042	.018
	4	.999	.987	.938	.836	.686	.515	.352	.217	.120	.059
	5	1.000	.998	.983	.939	.852	.722	.564	.403	.261	.151
	6		1.000	.996	.982	.943	.869	.755	.610	.452	.304
	7			.999	.996	.983	.950	.887	.787	.654	.500
	8			1.000	.999	.996	.985	.958	.905	.818	.696
	9				1.000	.999	.996	.988	.966	.923	.849
	10					1.000	.999	.997	.991	.975	.941
	11						1.000	1.000	.998	.994	.982
	12								1.000	.999	.996
	13									1.000	1.000
16	0	.440	.185	.074	.028	.010	.003	.001	.000	.000	.000
	1	.811	.515	.284	.141	.063	.026	.010	.003	.001	.000
	2	.957	.789	.561	.352	.197	.099	.045	.018	.007	.002
	3	.993	.932	.790	.598	.405	.246	.134	.065	.028	.011
	4	.999	.983	.921	.798	.630	.450	.289	.167	.085	.038
	5	1.000	.997	.976	.918	.810	.660	.490	.329	.198	.105
	6		.999	.994	.973	.920	.825	.688	.527	.366	.227
	7		1.000	.999	.993	.973	.926	.841	.716	.563	.402
	8			1.000	.999	.993	.974	.933	.858	.744	.598
	9				1.000	.998	.993	.977	.942	.876	.773
	10					1.000	.998	.994	.981	.951	.895
	11						1.000	.999	.995	.985	.962
	12							1.000	.999	.997	.989
	13								1.000	.999	.998
	14									1.000	1.000
17	0	.418	.167	.063	.023	.008	.002	.001	.000	.000	.000
	1	.792	.482	.252	.118	.050	.019	.007	.002	.001	.000
	2	.950	.762	.520	.310	.164	.077	.033	.012	.004	.001
	3	.991	.917	.756	.549	.353	.202	.103	.046	.018	.006
	4	.999	.978	.901	.758	.574	.389	.235	.126	.060	.025
	5	1.000	.995	.968	.894	.765	.597	.420	.264	.147	.072
	6		.999	.992	.962	.893	.775	.619	.448	.290	.166
	7		1.000	.998	.989	.960	.895	.787	.641	.474	.315
	8			1.000	.997	.988	.960	.901	.801	.663	.500
	9				1.000	.997	.987	.962	.908	.817	.685
	10					.999	.997	.988	.965	.917	.834
	11					1.000	.999	.997	.989	.970	.928
	12						1.000	.999	.997	.991	.975
	13							1.000	1.000	.998	.994
	14									1.000	.999
	15										1.000

		p									
n	X	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
18	0	.397	.150	.054	.018	.006	.002	.000	.000	.000	.000
	1	.774	.450	.224	.099	.039	.014	.005	.001	.000	.000
	2	.942	.734	.480	.271	.135	.060	.024	.008	.003	.001
	3	.989	.902	.720	.501	.306	.165	.078	.033	.012	.004
	4	.998	.972	.879	.716	.519	.333	.189	.094	.041	.015
	5	1.000	.994	.958	.867	.717	.534	.355	.209	.108	.048
	6		.999	.988	.949	.861	.722	.549	.374	.226	.119
	7		1.000	.997	.984	.943	.859	.728	.563	.391	.240
	8			.999	.996	.981	.940	.861	.737	.578	.407
	9			1.000	.999	.995	.979	.940	.865	.747	.593
	10				1.000	.999	.994	.979	.942	.872	.760
	11					1.000	.999	.994	.980	.946	.881
	12						1.000	.999	.994	.982	.952
	13							1.000	.999	.995	.985
	14								1.000	.999	.996
	15									1.000	.999
	16										1.000
19	0	.377	.135	.046	.014	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.755	.420	.198	.083	.031	.010	.003	.001	.000	.000
	2	.933	.705	.441	.237	.111	.046	.017	.005	.002	.000
	3	.987	.885	.684	.455	.263	.133	.059	.023	.008	.002
	4	.998	.965	.856	.673	.465	.282	.150	.070	.028	.010
	5	1.000	.991	.946	.837	.668	.474	.297	.163	.078	.032
	6		.998	.984	.932	.825	.666	.481	.308	.173	.084
	7		1.000	.996	.977	.923	.818	.666	.488	.317	.180
	8			.999	.993	.971	.916	.815	.667	.494	.324
	9			1.000	.998	.991	.967	.913	.814	.671	.500
	10				1.000	.998	.989	.965	.912	.816	.676
	11					1.000	.997	.989	.965	.913	.820
	12						.999	.997	.988	.966	.916
	13						1.000	.999	.997	.989	.968
	14							1.000	.999	.997	.990
	15								1.000	.999	.998
	16									1.000	1.000
20	0	.358	.122	.039	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.736	.392	.176	.069	.024	.008	.002	.001	.000	.000
	2	.925	.677	.405	.206	.091	.035	.012	.004	.001	.000
	3	.984	.867	.648	.411	.225	.107	.044	.016	.005	.001
	4	.997	.957	.830	.630	.415	.238	.118	.051	.019	.006
	5	1.000	.989	.933	.804	.617	.416	.245	.126	.055	.021
	6		.998	.978	.913	.786	.608	.417	.250	.130	.058
	7		1.000	.994	.968	.898	.772	.601	.416	.252	.132
	8			.999	.990	.959	.887	.762	.596	.414	.252
	9			1.000	.997	.986	.952	.878	.755	.591	.412
	10				.999	.996	.983	.947	.872	.751	.588
	11				1.000	.999	.995	.980	.943	.869	.748
	12					1.000	.999	.994	.979	.942	.868
	13						1.000	.998	.994	.979	.942
	14							1.000	.998	.994	.979
	15								1.000	.998	.994
	16									1.000	.999
	17										1.000

Table 3. Distribution de Poisson

Fournit la probabilité $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

	λ									
x	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1.0**
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**2.0**
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
x	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0540
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
x	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0344	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954

					λ					
x	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**4.0**
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0093	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

					λ					
x	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**4.6**	**4.7**	**4.8**	**4.9**	**5.0**
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0163	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0280	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0014	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

					λ					
x	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**5.7**	**5.8**	**5.9**	**6.0**
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0311	0.0287	0.0265	0.0244	0.0225	0.0207	0.0191	0.0176	0.0162	0.0149
2	0.0793	0.0746	0.0701	0.0659	0.0618	0.0580	0.0544	0.0509	0.0477	0.0446
3	0.1348	0.1293	0.1239	0.1185	0.1133	0.1082	0.1033	0.0985	0.0938	0.0892
4	0.1719	0.1681	0.1641	0.1600	0.1558	0.1515	0.1472	0.1428	0.1383	0.1339
5	0.1753	0.1748	0.1740	0.1728	0.1714	0.1697	0.1678	0.1656	0.1632	0.1606
6	0.1490	0.1515	0.1537	0.1555	0.1571	0.1584	0.1594	0.1601	0.1605	0.1606
7	0.1086	0.1125	0.1163	0.1200	0.1234	0.1267	0.1298	0.1326	0.1353	0.1377
8	0.0692	0.0731	0.0771	0.0810	0.0849	0.0887	0.0925	0.0962	0.0998	0.1033
9	0.0392	0.0423	0.0454	0.0486	0.0519	0.0552	0.0586	0.0620	0.0654	0.0688
10	0.0200	0.0220	0.0241	0.0262	0.0285	0.0309	0.0334	0.0359	0.0386	0.0413
11	0.0093	0.0104	0.0116	0.0129	0.0143	0.0157	0.0173	0.0190	0.0207	0.0225
12	0.0039	0.0045	0.0051	0.0058	0.0065	0.0073	0.0082	0.0092	0.0102	0.0113
13	0.0015	0.0018	0.0021	0.0024	0.0028	0.0032	0.0036	0.0041	0.0046	0.0052
14	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0022
15	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
16	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0137	0.0126	0.0116	0.0106	0.0098	0.0090	0.0082	0.0076	0.0070	0.0064
2	0.0417	0.0390	0.0364	0.0340	0.0318	0.0296	0.0276	0.0258	0.0240	0.0223
3	0.0848	0.0806	0.0765	0.0726	0.0688	0.0652	0.0617	0.0584	0.0552	0.0521
4	0.1294	0.1249	0.1205	0.1162	0.1118	0.1076	0.1034	0.0992	0.0952	0.0912
5	0.1579	0.1549	0.1519	0.1487	0.1454	0.1420	0.1385	0.1349	0.1314	0.1277
6	0.1605	0.1601	0.1595	0.1586	0.1575	0.1562	0.1546	0.1529	0.1511	0.1490
7	0.1399	0.1418	0.1435	0.1450	0.1462	0.1472	0.1480	0.1486	0.1489	0.1490
8	0.1066	0.1099	0.1130	0.1160	0.1188	0.1215	0.1240	0.1263	0.1284	0.1304
9	0.0723	0.0757	0.0791	0.0825	0.0858	0.0891	0.0923	0.0954	0.0985	0.1014
10	0.0441	0.0469	0.0498	0.0528	0.0558	0.0588	0.0618	0.0649	0.0679	0.0710
11	0.0245	0.0265	0.0285	0.0307	0.0330	0.0353	0.0377	0.0401	0.0426	0.0452
12	0.0124	0.0137	0.0150	0.0164	0.0179	0.0194	0.0210	0.0227	0.0245	0.0264
13	0.0058	0.0065	0.0073	0.0081	0.0089	0.0098	0.0108	0.0119	0.0130	0.0142
14	0.0025	0.0029	0.0033	0.0037	0.0041	0.0046	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071
15	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0020	0.0023	0.0026	0.0029	0.0033
16	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0010	0.0011	0.0013	0.0014
17	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006
18	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0059	0.0054	0.0049	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035	0.0032	0.0029	0.0027
2	0.0208	0.0194	0.0180	0.0167	0.0156	0.0145	0.0134	0.0125	0.0116	0.0107
3	0.0492	0.0464	0.0438	0.0413	0.0389	0.0366	0.0345	0.0324	0.0305	0.0286
4	0.0874	0.0836	0.0799	0.0764	0.0729	0.0696	0.0663	0.0632	0.0602	0.0573
5	0.1241	0.1204	0.1167	0.1130	0.1094	0.1057	0.1021	0.0986	0.0951	0.0916
6	0.1468	0.1445	0.1420	0.1394	0.1367	0.1339	0.1311	0.1282	0.1252	0.1221
7	0.1489	0.1486	0.1481	0.1474	0.1465	0.1454	0.1442	0.1428	0.1413	0.1396
8	0.1321	0.1337	0.1351	0.1363	0.1373	0.1382	0.1388	0.1392	0.1395	0.1396
9	0.1042	0.1070	0.1096	0.1121	0.1144	0.1167	0.1187	0.1207	0.1224	0.1241
10	0.0740	0.0770	0.0800	0.0829	0.0858	0.0887	0.0914	0.0941	0.0967	0.0993
11	0.0478	0.0504	0.0531	0.0558	0.0585	0.0613	0.0640	0.0667	0.0695	0.0722
12	0.0283	0.0303	0.0323	0.0344	0.0366	0.0388	0.0411	0.0434	0.0457	0.0481
13	0.0154	0.0168	0.0181	0.0196	0.0211	0.0227	0.0243	0.0260	0.0278	0.0296
14	0.0078	0.0086	0.0095	0.0104	0.0113	0.0123	0.0134	0.0145	0.0157	0.0169
15	0.0037	0.0041	0.0046	0.0051	0.0057	0.0062	0.0069	0.0075	0.0083	0.0090
16	0.0016	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0030	0.0033	0.0037	0.0041	0.0045
17	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0012	0.0013	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021
18	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
19	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004
20	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

	λ									
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011
2	0.0100	0.0092	0.0086	0.0079	0.0074	0.0068	0.0063	0.0058	0.0054	0.0050
3	0.0269	0.0252	0.0237	0.0222	0.0208	0.0195	0.0183	0.0171	0.1060	0.0150
4	0.0544	0.0517	0.0491	0.0466	0.0443	0.0420	0.0398	0.0377	0.0357	0.0337

	λ									
x	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**8.9**	**9.0**
5	0.0882	0.0849	0.0816	0.0784	0.0752	0.0722	0.0692	0.0663	0.0635	0.0607
6	0.1191	0.1160	0.1128	0.1097	0.1066	0.1034	0.1003	0.0972	0.0941	0.0911
7	0.1378	0.1358	0.1338	0.1317	0.1294	0.1271	0.1247	0.1222	0.1197	0.1171
8	0.1395	0.1392	0.1388	0.1382	0.1375	0.1366	0.1356	0.1344	0.1332	0.1318
9	0.1256	0.1269	0.1280	0.1290	0.1299	0.1306	0.1311	0.1315	0.1317	0.1318
10	0.1017	0.1040	0.1063	0.1084	0.1104	0.1123	0.1140	0.1157	0.1172	0.1186
11	0.0749	0.0776	0.0802	0.0828	0.0853	0.0878	0.0902	0.0925	0.0948	0.0970
12	0.0505	0.0530	0.0555	0.0579	0.0604	0.0629	0.0654	0.0679	0.0703	0.0728
13	0.0315	0.0334	0.0354	0.0374	0.0395	0.0416	0.0438	0.0459	0.0481	0.0504
14	0.0182	0.0196	0.0210	0.0225	0.0240	0.0256	0.0272	0.0289	0.0306	0.0324
15	0.0098	0.0107	0.0116	0.0126	0.0136	0.0147	0.0158	0.0169	0.0182	0.0194
16	0.0050	0.0055	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	0.0086	0.0093	0.0101	0.0109
17	0.0024	0.0026	0.0029	0.0033	0.0036	0.0040	0.0044	0.0048	0.0053	0.0058
18	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0026	0.0029
19	0.0005	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014
20	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
21	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.000

	λ									
x	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**9.4**	**9.5**	**9.6**	**9.7**	**9.8**	**9.9**	**10**
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
2	0.0046	0.0043	0.0040	0.0037	0.0034	0.0031	0.0029	0.0027	0.0025	0.0023
3	0.0140	0.0131	0.0123	0.0115	0.0107	0.0100	0.0093	0.0087	0.0081	0.0076
4	0.0319	0.0302	0.0285	0.0269	0.0254	0.0240	0.0226	0.0213	0.0201	0.0189
5	0.0581	0.0555	0.0530	0.0506	0.0483	0.0460	0.0439	0.0418	0.0398	0.0378
6	0.0881	0.0851	0.0822	0.0793	0.0764	0.0736	0.0709	0.0682	0.0656	0.0631
7	0.1145	0.1118	0.1091	0.1064	0.1037	0.1010	0.0982	0.0955	0.0928	0.0901
8	0.1302	0.1286	0.1269	0.1251	0.1232	0.1212	0.1191	0.1170	0.1148	0.1126
9	0.1317	0.1315	0.1311	0.1306	0.1300	0.1293	0.1284	0.1274	0.1263	0.1251
10	0.1198	0.1210	0.1219	0.1228	0.1235	0.1241	0.1245	0.1249	0.1250	0.1251
11	0.0991	0.1012	0.1031	0.1049	0.1067	0.1083	0.1098	0.1112	0.1125	0.1137
12	0.0752	0.0776	0.0799	0.0822	0.0844	0.0866	0.0888	0.0908	0.0928	0.0948
13	0.0526	0.0549	0.0572	0.0594	0.0617	0.0640	0.0662	0.0685	0.0707	0.0729
14	0.0342	0.0361	0.0380	0.0399	0.0419	0.0439	0.0459	0.0479	0.0500	0.0521
15	0.0208	0.0221	0.0235	0.0250	0.0265	0.0281	0.0297	0.0313	0.0330	0.0347
16	0.0118	0.0127	0.0137	0.0147	0.0157	0.0168	0.0180	0.0192	0.0204	0.0217
17	0.0063	0.0069	0.0075	0.0081	0.0088	0.0095	0.0103	0.0111	0.0119	0.0128
18	0.0032	0.0035	0.0039	0.0042	0.0046	0.0051	0.0055	0.0060	0.0065	0.0071
19	0.0015	0.0017	0.0019	0.0021	0.0023	0.0026	0.0028	0.0031	0.0034	0.0037
20	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012	0.0014	0.0015	0.0017	0.0019
21	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009
22	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
23	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001

	λ									
x	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019	0.0010	0.0005	0.0002	0.0001	0.0001
6	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048	0.0026	0.0014	0.0007	0.0004	0.0002
7	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104	0.0060	0.0034	0.0018	0.0010	0.0005
8	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194	0.0120	0.0072	0.0042	0.0024	0.0013
9	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324	0.0213	0.0135	0.0083	0.0050	0.0029
10	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486	0.0341	0.0230	0.0150	0.0095	0.0058
11	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663	0.0496	0.0355	0.0245	0.0164	0.0106
12	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829	0.0661	0.0504	0.0368	0.0259	0.0176
13	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956	0.0814	0.0658	0.0509	0.0378	0.0271
14	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024	0.0930	0.0800	0.0655	0.0514	0.0387
15	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024	0.0992	0.0906	0.0786	0.0650	0.0516
16	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960	0.0992	0.0963	0.0884	0.0772	0.0646
17	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847	0.0934	0.0963	0.0936	0.0863	0.0760
18	0.0145	0.0256	0.0397	0.0554	0.0706	0.0830	0.0909	0.0936	0.0911	0.0844
19	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557	0.0699	0.0814	0.0887	0.0911	0.0888
20	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418	0.0559	0.0692	0.0798	0.0866	0.0888
21	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299	0.0426	0.0560	0.0684	0.0783	0.0846
22	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204	0.0310	0.0433	0.0560	0.0676	0.0769
23	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133	0.0216	0.0320	0.0438	0.0559	0.0669
24	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083	0.0144	0.0226	0.0328	0.0442	0.0557
25	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050	0.0092	0.0154	0.0237	0.0336	0.0446
26	0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029	0.0057	0.0101	0.0164	0.0246	0.0343
27	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0034	0.0063	0.0109	0.0173	0.0254
28	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0019	0.0038	0.0070	0.0117	0.0181
29	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0023	0.0044	0.0077	0.0125
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013	0.0026	0.0049	0.0083
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0015	0.0030	0.0054
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0009	0.0018	0.0034
33	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0010	0.0020
34	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0012
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007
36	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
37	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
38	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
39	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Table 4. Fonction de répartition de la loi de Poisson

$$\text{Fournit la probabilité } P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!} \text{pour } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

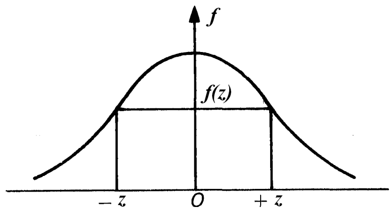
λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table 5. Densité de probabilité de la loi normale centrée réduite

$$f(t) = f(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,398 9	0,397 0	0,391 0	0,381 4	0,368 3	0,352 1	0,333 2	0,312 3	0,289 7	0,266 1
1,	0,242 0	0,217 9	0,194 2	0,171 4	0,149 7	0,129 5	0,110 9	0,094 0	0,079 0	0,065 6
2,	0,054 0	0,044 0	0,035 5	0,028 3	0,022 4	0,017 5	0,013 6	0,010 4	0,007 9	0,006 0
3,	0,004 4	0,003 3	0,002 4	0,001 7	0,001 2	0,000 9	0,000 6	0,000 4	0,000 3	0,000 2

Exemples :

$$\begin{aligned} f(1.3) &= 0.1714 \\ f(-2.7) &= f(2.7) = 0.0104. \end{aligned}$$

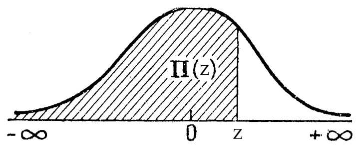


Table 6. Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
Probabilité d'une valeur inférieure à t :

$$P(Z < t) = F(t) = \pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz.$$

Pour $t < 0$, on a $P(Z < t) = 1 - \pi(-t)$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

Nota. — La table donne les valeurs de $\pi(t)$ pour z positif. Lorsque z est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1.37$ $\quad \pi(t) = 0.9147$

pour $t = -1.37$ $\quad \pi(t) = \pi(-1.37) = 1 - \pi(1.37) = 1 - 0.9147 = 0.0853.$

Table 6'. Fractiles de la Loi normale centrée réduite

$$U \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Pour $P < 0.5$ (colonne de gauche et ligne supérieure) les fractiles sont négatifs.

Pour $P > 0.5$ (colonne de droite et ligne inférieure) les fractiles sont positifs.

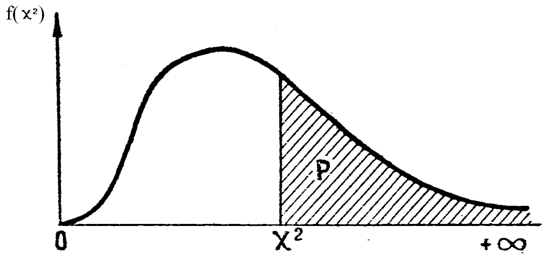
P	**0**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**	**0.006**	**0.007**	**0.008**	**0.009**	**0.01**	
0	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	**0.99**
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	**0.98**
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	**0.97**
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	**0.96**
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	**0.95**
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	**0.94**
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	**0.93**
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	**0.92**
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	**0.91**
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	**0.90**
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	**0.89**
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	**0.88**
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	**0.87**
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	**0.86**
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	**0.85**
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	**0.84**
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	**0.83**
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	**0.82**
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	**0.81**
0.19	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	**0.80**
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	**0.79**
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	**0.78**
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	**0.77**
0.23	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	**0.76**
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	**0.75**
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	**0.74**
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	**0.73**
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	**0.72**
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	**0.71**
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	**0.70**
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	**0.69**
0.31	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	**0.68**
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	**0.67**
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	**0.66**
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	**0.65**
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	**0.64**
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	**0.3425**	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	**0.63**
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	**0.62**
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	**0.61**
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	**0.60**
0.40	0.2533	0.2508	**0.2482**	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	**0.59**
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	**0.58**
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	**0.57**
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	**0.56**
0.44	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	**0.55**
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	**0.54**
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	**0.53**
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	**0.52**
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	**0.51**
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	**0.50**
	0.01	**0.009**	**0.008**	**0.007**	**0.006**	**0.005**	**0.004**	**0.003**	**0.002**	**0.001**	**0**	**P**

Exemples : $\pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340 \Longrightarrow u = 0.3425$;

$\pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020 \longrightarrow u = -0.2482$

Table 7. Distribution de χ^2 (Loi de K. Pearson)

Valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.



La table donne la fonction :

$$1 - F(\chi^2) = P(X \geq \chi^2) = P$$

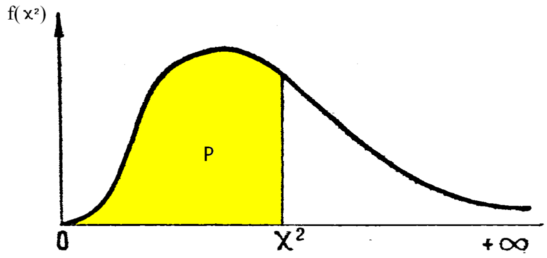
ν	P = 0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Nota : ν est le nombre de degrés de liberté.
Pour ν supérieur à 30, on admet que la variable aléatoire est approximativement distribuée suivant la loi normale centrée réduite ($\mu = 0, \sigma = 1$).

Table 8. Fonction de répartition de la loi de χ^2.

Fonction de répartition $F(x) = P(X < x)$

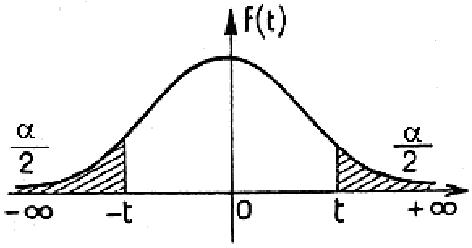
Si ν est le nombre de degrés de liberté d'une variable χ^2, si x est un nombre positif et si on pose : $F(x) = P(X < x) = P$. La table donne x pour différentes valeurs de ν et de P.



ν \ P	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.14	0.27	0.45	0.70	1.07	1.64	2.70	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	0.44	0.71	1.02	1.38	1.83	2.40	3.21	4.60	5.99	7.37	9.21
3	0.11	0.21	0.35	0.58	1.00	1.42	1.86	2.36	2.94	3.66	4.64	6.25	7.81	9.34	11.34
4	0.29	0.48	0.71	1.06	1.64	2.19	2.75	3.35	4.04	4.87	5.98	7.77	9.48	11.14	13.27
5	0.55	0.83	1.14	1.61	2.34	2.99	3.65	4.35	5.13	6.06	7.28	9.23	11.07	12.83	15.08
6	0.87	1.23	1.63	2.20	3.07	3.82	4.57	5.34	6.21	7.23	8.55	10.64	12.59	14.44	16.81
7	1.23	1.68	2.16	2.83	3.82	4.67	5.49	6.34	7.28	8.38	9.80	12.01	14.06	16.01	18.47
8	1.64	2.17	2.73	3.48	4.59	5.52	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.50	17.53	20.09
9	2.08	2.70	3.32	4.16	5.38	6.39	7.35	8.34	9.41	10.65	12.24	14.68	16.91	19.02	21.66
10	2.55	3.24	3.94	4.86	6.17	7.26	8.29	9.34	10.47	11.78	13.44	15.98	18.30	20.48	23.20
11	3.05	3.81	4.57	5.57	6.98	8.14	9.23	10.34	11.52	12.89	14.63	17.27	19.67	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.22	6.30	7.80	9.03	10.18	11.34	12.58	14.01	15.81	18.54	21.02	23.33	26.21
13	4.10	5.00	5.89	7.04	8.63	9.92	11.12	12.33	13.63	15.11	16.98	19.81	22.36	24.73	27.68
14	4.66	5.62	6.57	7.78	9.46	10.82	12.07	13.33	14.68	16.22	18.15	21.06	23.68	26.11	29.14
15	5.22	6.26	7.26	8.54	10.30	11.72	13.02	14.33	15.73	17.32	19.31	22.30	24.99	27.48	30.57
16	5.81	6.90	7.96	9.31	11.15	12.62	13.98	15.33	16.77	18.41	20.46	23.54	26.29	28.84	31.99
17	6.40	7.56	8.67	10.08	12.00	13.53	14.93	16.33	17.82	19.51	21.61	24.76	27.58	30.19	33.40
18	7.01	8.23	9.39	10.86	12.85	14.43	15.89	17.33	18.86	20.60	22.75	25.98	28.86	31.52	34.80
19	7.63	8.90	10.11	11.65	13.71	15.35	16.85	18.33	19.91	21.68	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	14.57	16.26	17.80	19.33	20.95	22.77	25.03	28.41	31.41	34.16	37.56
21	8.89	10.28	11.59	13.23	15.44	17.18	18.76	20.33	21.99	23.85	26.17	29.61	32.67	35.47	38.93
22	9.54	10.98	12.33	14.04	16.31	18.10	19.72	21.33	23.03	24.93	27.30	30.81	33.92	36.78	40.28
23	10.19	11.68	13.09	14.84	17.18	19.02	20.69	22.33	24.06	26.01	28.42	32.00	35.17	38.07	41.63
24	10.85	12.40	13.84	15.65	18.06	19.94	21.65	23.33	25.10	27.09	29.55	33.19	36.41	39.36	42.97
25	11.52	13.11	14.61	16.47	18.93	20.86	22.61	24.33	26.14	28.17	30.67	34.38	37.65	40.64	44.31
26	12.19	13.84	15.37	17.29	19.82	21.79	23.57	25.33	27.17	29.24	31.79	35.56	38.88	41.92	45.64
27	12.87	14.57	16.15	18.11	20.70	22.71	24.54	26.33	28.21	30.31	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.30	16.92	18.93	21.58	23.64	25.50	27.33	29.24	31.39	34.02	37.91	41.33	44.46	48.27
29	14.25	16.04	17.70	19.76	22.47	24.57	26.47	28.33	30.28	32.46	35.13	39.08	42.55	45.72	49.58
30	14.95	16.79	18.49	20.59	23.36	25.50	27.44	29.33	31.31	33.53	36.25	40.25	43.77	46.97	50.89
31	15.65	17.53	19.28	21.43	24.25	26.43	28.40	30.33	32.34	34.59	37.35	41.42	44.98	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	22.27	25.14	27.37	29.37	31.33	33.38	35.66	38.46	42.58	46.19	49.48	53.48
33	17.07	19.04	20.86	23.11	26.04	28.30	30.34	32.33	34.41	36.73	39.57	43.74	47.39	50.72	54.77
34	17.78	19.80	21.66	23.95	26.93	29.24	31.31	33.33	35.44	37.79	40.67	44.90	48.60	51.96	56.06
35	18.50	20.56	22.46	24.79	27.83	30.17	32.28	34.33	36.47	38.85	41.77	46.05	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.33	23.26	25.64	28.73	31.11	33.25	35.33	37.50	39.92	42.87	47.21	50.99	54.43	58.61
37	19.96	22.10	24.07	26.49	29.63	32.05	34.22	36.33	38.53	40.98	43.97	48.36	52.19	55.66	59.89
38	20.69	22.87	24.88	27.34	30.53	32.99	35.19	37.33	39.56	42.04	45.07	49.51	53.38	56.89	61.16
39	21.42	23.65	25.69	28.19	31.44	33.93	36.16	38.33	40.59	43.10	46.17	50.65	54.57	58.12	62.42
40	22.16	24.43	26.50	29.05	32.34	34.87	37.13	39.33	41.62	44.16	47.26	51.80	55.75	59.34	63.69
41	22.90	25.21	27.32	29.90	33.25	35.81	38.10	40.33	42.65	45.22	48.36	52.94	56.94	60.56	64.95
42	23.65	25.99	28.14	30.76	34.15	36.75	39.07	41.33	43.67	46.28	49.45	54.09	58.12	61.77	66.20
43	24.39	26.78	28.96	31.62	35.06	37.69	40.04	42.33	44.70	47.33	50.54	55.23	59.30	62.99	67.45
44	25.14	27.57	29.78	32.48	35.97	38.64	41.02	43.33	45.73	48.39	51.63	56.36	60.48	64.20	68.70
45	25.90	28.36	30.61	33.35	36.88	39.58	41.99	44.33	46.76	49.45	52.72	57.50	61.65	65.41	69.95
46	26.65	29.16	31.43	34.21	37.79	40.52	42.96	45.33	47.78	50.50	53.81	58.64	62.82	66.61	71.20
47	27.41	29.95	32.26	35.08	38.70	41.47	43.94	46.33	48.81	51.56	54.90	59.77	64.00	67.82	72.44
48	28.17	30.75	33.09	35.94	39.62	42.42	44.91	47.33	49.84	52.61	55.99	60.90	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	36.81	40.53	43.36	45.88	48.33	50.86	53.66	57.07	62.03	66.33	70.22	74.91
50	29.70	32.35	34.76	37.68	41.44	44.31	46.86	49.33	51.89	54.72	58.16	63.16	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.18	46.45	50.64	53.80	56.62	59.33	62.13	65.22	68.97	74.39	79.08	83.29	88.37
70	45.44	48.75	51.73	55.32	59.89	63.34	66.39	69.33	72.35	75.68	79.71	85.52	90.53	95.02	100.42
80	53.54	57.15	60.39	64.27	69.20	72.91	76.18	79.33	82.56	86.11	90.40	96.57	101.87	106.62	112.32
90	61.75	65.64	69.12	73.29	78.55	82.51	85.99	89.33	92.76	96.52	101.05	107.56	113.14	118.13	124.11
100	70.06	74.22	77.92	82.35	87.94	92.12	95.80	99.33	102.94	106.90	111.66	118.49	124.34	129.56	135.80
200	156.43	162.72	168.27	174.83	183.00	189.04	194.31	199.33	204.43	209.98	216.60	226.02	233.99	241.05	249.44

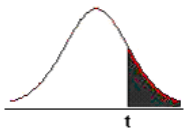
Table 9. Distribution T_n (Loi de Student)

Valeurs de T_n ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue : $P(|T_n| > t_0) = \alpha$.



n \ α	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,929
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Table 10. Distribution T_n (Loi de Student)



Valeurs de $t_{n,\alpha}$ de n degrés de liberté ayant la probabilité α d'être dépassée : $\boldsymbol{P(T_n > t_{n,\alpha}) = \alpha}$

n \ α	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	0.324920	1.000000	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	0.288675	0.816497	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	0.276671	0.764892	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	0.270722	0.740697	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	0.267181	0.726687	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	0.264835	0.717558	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	0.263167	0.711142	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	0.261921	0.706387	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	0.260955	0.702722	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	0.260185	0.699812	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	0.259556	0.697445	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	0.259033	0.695483	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	0.258591	0.693829	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	0.258213	0.692417	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	0.257885	0.691197	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	0.257599	0.690132	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	0.257347	0.689195	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	0.257123	0.688364	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	0.256923	0.687621	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	0.256743	0.686954	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	0.256580	0.686352	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	0.256432	0.685805	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	0.256297	0.685306	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	0.256173	0.684850	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	0.256060	0.684430	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	0.255955	0.684043	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	0.255858	0.683685	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	0.255768	0.683353	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	0.255684	0.683044	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	0.255605	0.682756	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
∞	0.253347	0.674490	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

Table 11. Fonction de répartition de la loi de Student T_n

Soit T une variable de Student à ν degrés de liberté, de densité ρ. Si u est un nombre positif et si on pose :

$$\boldsymbol{F_n(u) = P(T < u) = p}$$

la table donne $\boldsymbol{u}$ pour différentes valeurs de $\boldsymbol{\nu}$ et de $\boldsymbol{p}$.

ν \ p	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.1293	0.2610	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.1283	0.2590	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.1281	0.2586	0.3940	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.1280	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.5350	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.1270	0.2562	0.3900	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.1269	0.2560	0.3896	0.5309	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.1267	0.2556	0.3890	0.5300	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.1265	0.2550	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.0500	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.6780	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.1260	0.2541	0.3866	0.5263	0.6772	0.8456	1.0424	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.1260	0.2540	0.3864	0.5261	0.6770	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
200	0.1258	0.2537	0.3859	0.5252	0.6757	0.8434	1.0391	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006

Le manuel de travaux dirigés "Eléments de la théorie des probabilités. Travaux dirigés" suit la structure et le contenu du livre du même titre en “Bases de la statistique – Ire partie" des spécialités Gestion et Economie de la filière de gestion à l’Université de Sofia "Sv. Kliment Ohridski". On y trouve une synthèse des définitions, des formules et des théorèmes (sans vérification et la preuve) de la théorie des probabilités: espaces de probabilité, la combinatoire, la probabilité, variables aléatoires et leurs caractéristiques, fonctions de distribution, la loi des grands nombres, théorème central limite. Les solutions de quelques exemples sont considérées et beaucoup de problèmes à résoudre sont donnés avec les réponses et des conseils pour la solution.

Le manuel est destiné aux travaux dirigés en “Bases de la statistique - Ire partie” et vise à développer des compétences pratiques pour déterminer les caractéristiques et les lois de distribution de variables aléatoires.

eISSN 2367-8666